UEVE 2019-2020
EC322 Probabilités

Feuille 1 de travaux dirigés

Evénement, Dénombrement, Probabilité

Exercice 1. Trois boules sont tirées successivement d'une urne contenant des boules blanches et des boules rouges. Soient les événements :

B_1 : "la 1-ière boule est blanche", B_2 : "la 2-ième boule est blanche", B_3 : "la 3-ième boule est blanche".

Exprimer les événements suivants en fonction de B_1, B_2 et B_3 :

1. "Toutes les boules sont blanches"
2. "Les deux premières boules sont blanches"
3. "Au moins une boule est blanche"
4. "Seulement la troisième boule est blanche"
5. "Exactement une boule est blanche"
6. "Au moins deux boules sont blanches"
7. "Aucune boule n'est blanche"
8. "Exactement deux boules sont blanches".

Exercice 2. Donner l'expression simplifiée des événements suivants:

1. $(E \cup F) \cap (E \cup F^c)$
2. $(E \cap F) \cup (E^c \cap F)$
3. $(E \cup F) \cap (E^c \cup F) \cap (E \cup F^c)$.
4. $(E \cup F) \cap (F \cup G)$ si $E \subset F \subset G$.
5. $(E^c \cup F^c)^c \cap (F^c \cup G^c)$ si $E \subset F \subset G$
6. $E \cap (E \cap F)^c$ si $E \subset F$.

Soient E et F deux évéments d'un univers Ω. Montrer que

$$E = (E \cap F) \cup (E \cap F^c) \quad \text{et que} \quad E \cup F = (E \cap F) \cup (E \cap F^c) \cup (F \cap E^c)$$

et représenter les ensembles à l'aide d'un dessin.

Exercice 3. Soit $\Omega = \{a_1, \dots, a_n\}$ un ensemble de cardinal n et $\mathscr{P}(\Omega)$ l'ensemble des parties de Ω, qui est composé de l'ensemble vide $\emptyset$ et de l'ensemble des unions de singletons de Ω. On veut montrer que le cardinal de $\mathscr{P}(\Omega)$ est 2^n. Pour cela on écrit chaque élément de $\mathscr{P}(\Omega)$ comme union de singletons de Ω et on le code en lui faisant correspondre une succession de n cases où la case i prend la valeur 1 lorsque le singleton $\{a_i\}$ est présent dans l'union et la valeur 0 sinon. Par exemple, si $\Omega = \{a_1, a_2, a_3\}$, alors l'événement $A = \{a_1, a_3\} \in \mathscr{P}(\Omega)$ est codé 101 et l'événement $B = \{a_3, a_2\} \in \mathscr{P}$ est codé 011.

On suppose que $\Omega = \{a_1, \dots, a_n\}$.

1. Coder les événements suivants: $\emptyset, \{a_2, a_n\}, \{a_3, a_{n-1}, a_n\}, \Omega$.
2. En déduire que le cardinal de $\mathscr{P}(\Omega)$ est 2^n.

Exercice 4. Combien de nombres peut-on former avec les chiffres $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$, chaque chiffre n'étant présent qu'une fois, de façon que chaque nombre commence par 7 et soit divisible par 5,

1. si les nombres sont de 8 chiffres ?
2. si les nombres sont de 6 chiffres ?

Exercice 5. Vous disposez de 5 billes rouges, de 2 blanches et de 3 jaunes que vous voulez aligner sur 10 cases. Les billes de même couleur sont indiscernables.

1. De combien de façons pouvez-vous disposer les 5 billes rouges?
2. De combien de façons pouvez-vous disposer les 2 billes blanches une fois que les rouges sont posées?
3. De combien de façons pouvez-vous disposer les 3 billes jaunes restantes?
4. En déduire le nombre de façons d'aligner toutes les billes. Un exemple d'alignement est: *rrrrbrjbjj*, où *r* désigne une boule rouge, *b* une boule blanche, et *j*, une boule jaune.

Exercice 6. On tire au hasard (et en même temps, de sorte que l'ordre de tirage ne compte pas) 3 boules d'une urne contenant 4 boules blanches et 2 boules noires. Quelle est la probabilité que l'une des boules tirées soit noire et que les deux autres soient blanches.

Exercice 7. On lance un dé pipé pour lequel

- les faces paires ont toutes les mêmes chances d'apparition.
- les faces impaires ont toutes les mêmes chances d'apparition.
- une face paire donnée a deux fois plus de chances d'apparaître qu'une face impaire donnée.

Alors

1. Déterminer la probabilité d'apparition d'une face paire.
2. Déterminer la probabilité d'apparition d'une face impaire.

Exercice 8. Soit A et B deux évément d'un univers Ω.

1. Montrer que $\mathbb{P}(B \backslash A) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$.
2. En déduire que si $A \subset B$ alors $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$.
3. Montrer que $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$.

Exercice 9. Soit A et B deux évément d'un univers Ω tels que $\mathbb{P}(A) = 0.6$, $\mathbb{P}(B) = 0.4$ et $\mathbb{P}(A \cap B) = 0.2$. Déterminer les probabilités de

$$A \cup B; \quad A^c; \quad B^c; \quad A^c \cup B^c; \quad A^c \cap B; \quad A \cup B^c; \quad A^c \cap B^c.$$

Exercice 10. Quelle est, dans une classe de 30 élèves, la probabilité pour que deux élèves au moins aient le même jour d'anniversaire?

Exercice 11. On jette 3 dés discernables non pipés. Calculer la probabilité

1. d'obtenir au moins un as ;
2. d'obtenir au moins 2 faces portant le même chiffre ;
3. que la somme des points de chaque face soit paire.