UEVE 2020-2021
L2 *Maths/DL Math-Eco/Info/DL Bio-Info* *Probabilités*

Feuille 3 de TD: Variables aléatoires discrètes

Exercice 1. Dans un aéroport, le nombre d'avions X qui se préparent à atterrir au cours d'une minute satisfait

$$\mathbb{P}(X = k) = e^{-1}\frac{1^k}{k!}, \quad \text{pour } k \in \mathbb{N}.$$

On dit que X suit une loi de Poisson de paramètre 1.

1. Montrer qu'il s'agit bien d'une loi de probabilité.
2. Si la capacité d'accueil de l'aéroport est de 2 avions par minutes, quelle est la probabilité qu'il n'y ait pas d'attente pendant une minute donnée ?
3. Même question si l'aéroport peut accueillir trois avions à la minute?

Exercice 2. On dispose d'un dé non pipé dont les faces sont numérotées de 1 à 6. On considère le jeu aléatoire suivant. On lance trois fois le dé: à chaque lancer, on gagne 5€ si la face 6 apparaît, sinon (si une autre face apparaît), on perd 1€. Soit X la quantité représentant notre richesse à l'issu des trois lancers.

1. Quelle est l'ensemble des valeurs prises par X.
2. Déterminer la loi de probabilité de X.
3. Déterminer la fonction de répartition de X et représentez-la graphiquement.

Exercice 3. Soit X une variable aléatoire de fonction de répartition

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 3 \\ 1/4 & \text{si } x \in [3, 5[\\ 5/8 & \text{si } x \in [5, 10[\\ 1 & \text{si } x \geq 10. \end{cases}$$

1. Déterminer la loi de probabilité de X.
2. Calculer l'espérance de X.

Exercice 4. Un hôtel constate un taux importants d'annulation de réservation à certaines périodes prisées. Pour éviter d'avoir des chambres vides à ces périodes, il décide de faire de la surréservation en validant plus de réservations que la capacité d'accueil de l'hôtel. On suppose que chaque client potentiel se présente effectivement à l'hôtel avec une probabilité $p = 2/3$ et que les comportements des clients sont indépendants les uns des autres. L'hôtel a réservé $n = 55$ chambres alors qu'il en dispose que $N = 50$.
I. Soit X la variable aléatoire représentant le nombre de client se présentant effectivement à l'hôtel.

1. Quelle est la loi de X?
2. Quelle est son espérance?
3. Quelle est la probabilité qu'il n'y ait pas assez de chambres pour accueillir tous les clients? (posez la formule sans nécessairement faire les calculs).

II. On veut maintenant déterminer le nombre de chambres en surréservation qui permet à l'hôtel d'assurer un taux de remplissage de 98%: c'est-à-dire, si X_i représente le client i, on veut déterminer m tel que

$$\mathbb{P}\big(X_1 + \ldots + X_{50} + \ldots + X_{50+m} \leq 50\big) = 0.98.$$

On utilisera pour cela le Théorème de la limite centrale en supposant que l'on peut écrire:

$$\frac{Y - \mathbb{E}(Y)}{\sqrt{\mathrm{Var}(Y)}} = Z \sim \mathcal{N}(0, 1), \qquad \text{avec } Y = X_1 + \ldots + X_{50} + \ldots + X_{50+m}. \tag{1}$$

1. La variable aléatoire Y est-elle de loi de Bernoulli ou de loi Binomiale (spécifiez ses paramètres)?
2. Que valent $\mathbb{E}(Y)$ et $\mathrm{Var}(Y)$ (on ne vous demande pas de faire des calculs)?

3. En utilisant (1) et en admettant que $\mathbb{P}(Z \leq 2.05) = 0.98$, montrer que

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}\big(X_1 + \ldots + X_{50} + \ldots + X_{50+m} \leq 50\big) = 0.98 \\ \iff \quad & 2 \times (50+m) + \sqrt{2} \times 2.05 \times \sqrt{50+m} - 150 = 0. \end{aligned} \tag{2}$$

4. Posez $x = \sqrt{50+m}$ et résolvez l'équation du second degré associé à (2).
5. Déduire la valeur de m.

Exercice 5. Soit $\lambda > 0$ et soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\{0, 1, 2, \ldots\}$ telle que

$$p(i) = \mathbb{P}(X = i) = c\frac{\lambda^i}{i!},\ i = 0, 1, 2, \ldots$$

1. Déterminer la constante c.
2. Calculer $\mathbb{P}(X = 0)$ et $\mathbb{P}(X \geq 2)$.
3. Calculer $\mathbb{E}(X)$ et $\mathrm{Var}(X)$. On rappelle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$.

Exercice 6. On lance une pièce de monnaie truquée dont la probabilité d'apparition de Pile est p. Soit X la variable aléatoire représentant le premier instant où Pile apparaît.

1. Montrer que X est une v.a. à valeurs dans $\{1, 2, \ldots\}$ et que sa loi de probabilité est donnée par

$$\mathbb{P}(X = k) = (1-p)^{k-1}p, \quad k = 1, 2, \ldots;\ p \in]0, 1[.$$

2. Qu'attendons-nous sur l'espérance de X lorsque p est proche de 0 et lorsque p est proche de 1. Calculer l'espérance de X.
3. Calculer Var(X).

Exercice 7. Soit X une variable aléatoire prenant les valeurs $\{-2, -1, 1, 2\}$ avec

$$\mathbb{P}(X = -2) =? \quad \mathbb{P}(X = -1) = 1/4 \quad \mathbb{P}(X = 1) = 1/4 \quad \mathbb{P}(X = 2) =?$$

1. Déterminer les valeurs manquantes pour que $\mathbb{E}(X) > 0$.
2. Calculer l'espérance de X pour les valeurs choisies.
3. Déterminer la variance de X.

Exercice 8. Soit X une variable aléatoire de loi binomiale de paramètres n et $p \in]0, 1[$ et on suppose que $\lambda = np$ est une constante (indépendante de n).

1. Montrer que pour tout $k = 0, \ldots, n$,

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{n^k} \frac{\lambda^k}{k!} \frac{(1-\lambda/n)^n}{(1-\lambda/n)^k}.$$

2. Calculer la limite des quantités: $\frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{n^k}$ et $\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n$ lorsque n tend vers $+\infty$.
3. Montrer que lorsque n est grand

$$\mathbb{P}(X = k) \approx e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}.$$

4. On s'intéresse à la loi du nombre de fautes (d'orthographe, de grammaire, ...) par page d'un grand journal. On suppose que la probabilité p de rencontrer une faute sur une page est très petite et que la loi du nombre X de fautes par page est une loi de Poisson de paramètre $\lambda = np$ où n représente le nombre de mots d'une page. Déterminer $\mathbb{P}(X = 0), \mathbb{P}(X = 1), \mathbb{P}(X \geq 3)$ lorsque $\lambda = 0.02$.

Exercice 9. Soit X une v.a. de loi de Bernoulli de paramètre p, $p \in]0, 1[$. Calculer l'espérance et la variance de X. Trouver la fonction de répartition de X et tracer son graphe.

Exercice 10. Calculer l'espérance et la variance des v.a. suivantes:
a) X une v.a. uniforme sur l'ensemble $\{1, \ldots, N\}$;
b) X une v.a. de loi Binomiale de paramètres (n, p).

Exercice 11. Un moteur d'avion tombe en panne pendant le vol avec probabilité p, indépendamment des autres. L'avion s'écrase si plus de la moitié de ses moteurs sont en panne. Quel type d'avion est plus sûr : à deux, trois au quatre moteurs ?

Exercice 12.(*extrait de l'examen 2019*) On lance une pièce de monnaie dont la probabilité d'apparition de Pile est p. On suppose que $p \in]0, 1[$ et on note $q = 1 - p$. On suppose que les événements liés aux différents lancers de la pièce sont indépendants. Soit X la variable aléatoire représentant le premier instant où la pièce tombe sur Pile.

1. Donner la loi de X: l'ensemble de ses valeurs et la probabilité de chaque valeur.

2. Pour tout $n \in^*$, calculer la fonction de répartition de X : $F_X(n) = \mathbb{P}(X \leq n)$. Trouver $\lim_{n \to +\infty} F_X(n)$.

3. Pour tout $n \in^*$, calculer $\mathbb{P}(X > n)$. Donner deux méthodes de calcul: la première basée sur la question précédente, et la deuxième basée sur la description de l'événement $\{X > n\}$ en termes des résultats des n premières épreuves.

4. Pour tout $n \in^*$, $k \in^*$, montrer que
$$\mathbb{P}(X > n + k | X > n) = \mathbb{P}(X > k).$$
Expliquer pourquoi cette propriété s'appelle "l'absence de mémoire".

5. On suppose que $p = 1/2$. Sachant que le Pile n'est pas sorti pendant les deux premiers lancers, quelle est la probabilité qu'il faille encore attendre plus de trois lancers supplémentaire pour que Pile apparaisse pour la première fois.

Indications: Si $q \in]0; 1[$, on a $1 + q + \ldots + q^{n-1} = \frac{1-q^n}{1-q}$.