UEVE 2020-2021
EC 322 Probabilités 1

Feuille 4 de travaux dirigés

Exercice 1. (*Loi uniforme*) On considère le jeu aléatoire suivant impliquant deux joueurs: un joueur R disposant de 3 pions rouges et un joueur V disposant de 3 pions verts. On considère un intervalle $[a, b]$ ($a < b$) sur lequel on jette une petite bille selon une loi uniforme X sur $[a, b]$ de densité de probabilité

$$f_X(x) = \frac{1}{b-a}\mathbf{1}_{[a,b]}(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{si } x \in [a, b] \\ 0 & \text{si } x \notin [a, b]. \end{cases}$$

Le jeu se déroule comme suit.

- Les joueurs placent leur trois pions les uns après les autres en des points de l'intervalle $[a, b]$.
- Une fois placés les joueurs n'ont plus la possibilité de déplacer leurs pions.
- On lance la bille selon une loi uniforme sur $[a, b]$ et
  a) si la bille passe le plus près d'un des pions du joueur R que ceux du joueur V alors le joueur R marque un point
  b) si la bille passe le plus près d'un des pions du joueur V que ceux du joueur R alors le joueur V marque un point.
  c) sinon les joueurs marquent tous les deux un point.

  On renouvelle l'expérience à 10 reprises et le gagnant sera celui qui aura marqué le plus de points.

1. Déterminer la fonction de répartition de X.
2. Pour simplifier on pose $a = 0$ et $b = 1$. Le joueur R choisit les emplacements $1/6$, puis $1/2$ et ensuite $5/6$ de l'intervalle $[0, 1]$ et le joueur V les emplacements $1/4$, puis $1/2$ et ensuite $3/4$.
   a) Quelles sont les chances pour le joueur R de marquer un point.
   b) Quelles sont les chances pour le joueur V de marquer un point.
   c) En déduire lequel des deux joueurs a le plus de chances de gagner la partie.
   d) Existe-t-il une stratégie qui permet de toujours avoir le plus de chances de gagner quelque soit la stratégie de l'adversaire.

Exercice 2. (*Une loi continue*) Soit la fonction $f(x) = c\,x^2\mathbf{1}_{]0,4[}(x) = \begin{cases} c\,x^2 & \text{si } x \in]0, 4[\\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

1. Déterminer c pour que f soit une densité de probabilité.
2. Soit X la variable aléatoire de densité f. Déterminer la fonction de répartition de X.
3. Calculer $\mathbb{P}(2 < X < 4)$. Que vaut $\mathbb{P}(2 < X \leq 4)$?

Exercice 3. (*Loi exponentielle à partir d'une loi uniforme*) Soit X une v.a de loi uniforme sur $]0, 1[$.

1. Soit a et b deux nombres réels tels que $a < b$ et soit Y la v.a. définie par $Y = a + (b - a)X$.
   (a) Déterminer la densité de probabilité de Y.
   (b) Calculer $\mathbb{E}(Y)$ et $\mathrm{Var}(Y)$.

2. Soit $\lambda > 0$ et soit Z la v.a. définie par

$$Z = -\frac{\ln(X)}{\lambda}.$$

   (a) Déterminer la densité de Z et identifier sa loi.

   (b) Calculer l'espérance et la variance de Z.

   (c) Calculer $\mathbb{E}(Z\mathbf{1}_{\{Z\geq 2\}})$.

   (d) Calculer $\mathbb{E}(Z^n)$ pour tout $n \geq 1$.

   (e) Montrer que pour tout $s, t \geq 0$,

$$\mathbb{P}(Z > t + s | Z > s) = \mathbb{P}(Z > t).$$

Application. On considère les durées de vie (en année) d'ampoules de même type d'une usine de fabrication d'ampoules. On suppose que la durée de vie d'une ampoule est la v.a. Z de loi donnée précédemment de paramètre $\lambda = 1.5$. On achète une ampoule de ce type.

1. Quelle est la probabilité pour qu'elle dure au moins: 2 ans? 5 ans?

2. Quelle est la probabilité pour qu'elle dure au moins un mois de plus sachant qu'elle a duré 2 ans?

Exercice 4. (*Moments d'une loi gaussienne standard*) Soit Y une v.a. gaussienne de moyenne μ et de variance $\sigma^2 > 0$: $Y \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.

1. Montrer que

$$X = \frac{Y - \mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0, 1).$$

2. Calculer $\mathbb{E}(X^3)$ et $\mathbb{E}(X^4)$.

3. Calculer, pour tout $n \geq 0$, $\mathbb{E}(X^{2n})$ et $\mathbb{E}(X^{2n+1})$.

4. Calculer $\mathbb{E}(e^{tX})$, pour $t \in \mathbb{R}$.

Exercice 5. (*Loi gaussienne*) Soit Y une v.a. gaussienne de moyenne μ et de variance $\sigma^2 > 0$: $Y \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. On rappelle que

$$X = \frac{Y - \mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0, 1).$$

1. Démontrer que la v.a. X est symétrique par apport à sa moyenne, c'est-à-dire, X et $-X$ ont la même loi ou autrement dit, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\mathbb{P}(X \leq x) = \mathbb{P}(-X \leq x).$$

   En déduire que pour tout $x \geq 0$,

   (a) $\mathbb{P}(|X| \geq x) = 2\,\mathbb{P}(X \geq x)$.

   (b) $\mathbb{P}(|X| \leq x) = 2\,\mathbb{P}(X \leq x) - 1$.

Application. On considère que la note de contrôle de probabilité des étudiants de L2 Maths est distribuée selon une loi normale de moyenne 12.5 et de variance 2 et que celle des étudiants de L1 Maths est distribuée selon une loi normale de moyenne 12.5 et de variance 7.

1. Quelle est la probabilité qu'un étudiant de L1 Maths ait une note supérieure ou égale à 17.

2. Quelle est la probabilité qu'un étudiant de L2 Maths ait une note supérieure ou égale à 17.

3. Vous êtes en licence (sans avoir redoubler) et vous rencontrez un étudiant qui est entrée à l'université une année après vous et qui suit la filière Maths. Lors de votre conversation il vous dit avoir eu 17 en contrôle de probabilité sans vous avoir dit s'il est en L1 ou en L2. Pourriez-vous déviner son niveau le plus probable connaissant les statistiques précédentes.

Exercice 6. (*Loi gaussienne*) On vous distribue vos notes de probabilité et votre collègue vous dit avoir eu $18/20$ sans vouloir vous montrer sa copie.

On suppose que les notes de probabilité sont réparties selon une loi Normale de moyenne μ et de variance σ^2 qui sont supposées être la moyenne empirique et la variance empirique de la classe communiquées par le professeur et qui sont respectivement de 11.75 et de 3.2.

1. Quelle est la probabilité qu'un étudiant donné ait une note supérieure ou égale à 18.
2. Quelle crédibilité pouvez-vous accorder à l'affirmation de votre collègue.

Exercice 7. Soit X une variable aléatoire de loi gaussienne, de moyenne μ et de variance σ^2: $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, avec $\sigma > 0$, et soit $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$.

1. Rappelez l'expression de la fonction de répartition F_Z de Z. Peut-on la calculer explicitement $F_Z(z)$ pour tout $z \in \mathbb{R}$.
2. En vous servant de la table de la gaussienne, déterminez les quantités suivantes et représentez les graphiquement:
$$\mathbb{P}(Z \leq 0), \quad \mathbb{P}(|Z| \leq 3), \quad \mathbb{P}(|Z| > 3).$$
3. Déterminer les réels a et c tel que $\mathbb{P}(Z \leq a) = 0.05$; $\mathbb{P}(|Z| \leq c) = 0.05$.
4. On pose $\mu = 3.5$ et $\sigma^2 = 4$. Déterminer les quantités suivantes:
$$\mathbb{P}(X \leq 0) \quad \text{et } \mathbb{P}(X > 3).$$
5. Soit $X_1, \ldots, X_n$ des v.a. i.i.d de loi $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ et soit $Y = \sum_{i=1}^n X_i$. Déterminer $\mathbb{E}(Y)$ et $\mathrm{Var}(Y)$.

Exercice 8. On suppose que sur une seconde période d'un match de foot, le nombre X de kilomètres parcouru par un joueur non dopé suit une loi gaussienne de moyenne $\mu = 4.5$ km et de variance $\sigma^2 = 4$. Supposons que la FIFA décide de faire passer un "test pour dopage" à tout joueur dont le nombre de kilomètres parcouru x lors de la seconde partie est invraisemblablement élevé à leurs yeux, c'est-à-dire, $\mathbb{P}(X \geq x) \leq 0.005$.

1. Un joueur a parcouru 7.6 km lors de la seconde partie. Doit-on lui faire passer un "test pour dopage"?
2. Quelle est la distance minimale parcourue x à partir de laquelle on doit faire passer un "test pour dopage" à un joueur. C'est-à-dire, trouver x tel que $\mathbb{P}(X \geq x) = 0.005$.

Données. On rappelle que si $Z \sim \mathcal{N}(0;1)$ alors $\mathbb{P}(Z \leq 1.55) = 0.9394$, $\mathbb{P}(Z \leq 0.78) = 0.7823$, $\mathbb{P}(Z \leq 2.57) = 0.995$.