UEVE 2020-2021

EC 322 Probabilités

Feuille 5 de travaux dirigés

Exercice 1. Soit X et Y deux variables aléatoires á valeurs dans $\{-1, 0, 1\}$. La loi du couple (X, Y) est donnée par le tableau suivant:

$X \setminus Y$	-1	0	1
-1	1/5	C	1/5
0	1/15	1/15	1/15
1	1/5	0	1/5

1. Trouver la valeur de la constante C.
2. Calculer $\mathbf{P}(X > 0; Y > 0)$.
3. Donner les lois marginales de X et de Y.
4. Calculer $\mathbf{E}X$ et $\mathbf{E}Y$.
5. Calculer la covariance du couple (X, Y).
6. X et Y, sont-elles indépendantes ?

Exercice 2.

Soient X et Y deux v.a. indépendantes des espérances et de variances respectives $m_X, m_Y, \sigma_X^2, \sigma_Y^2$. On définit des variables aléatoires

$$A = 2X - 3Y, \quad B = X - Y.$$

Calculer

1. $\mathbf{E}A$, $\mathbf{E}B$.
2. $\mathbf{Var}(A)$, $\mathbf{Var}(B)$.
3. $\mathbf{Cov}(A, B)$.

Exercice 3. On dispose de deux pièces de monnaie truquées dont les probabilités d'apparition de Pile sont p_1 et p_2 (on les appelle pièce I et pièce II, respectivement) avec $p_1, p_2 \in]0, 1[$. On les lance (simultanément) jusqu'à l'apparition de Pile pour l'une des pièces ou les deux pièces (on arrête de lancer une pièce dès que Pile apparaît et on poursuit les lancers avec l'autre pièce). Soit X la variable aléatoire représentant le rang de la première apparition de Pile pour la pièce I et Y la variable aléatoire représentant le rang de la première apparition de Pile pour la pièce II. La loi du couple est donnée

$$\mathbb{P}(X = i; Y = j) = (1 - p_1)^{i-1}(1 - p_2)^{j-1} p_1 p_2, \qquad i, j = 1, 2, \ldots$$

1. Déterminer les lois marginales de X et de Y.
2. Montrer que les variables aléatoires X et Y sont indépendantes.
3. Calculer $\mathbb{E}(XY)$.
4. Que vaut la covariance entre X et Y: $\mathrm{Cov}(X, Y)$?
5. Déterminer la probabilité pour que Pile apparaisse en premier avec la pièce I.

Exercice 4. On est sur le point de passer à la caisse d'une grande surface et on doit choisir de s'insérer sur une des deux queues (queue I et II) qu'on a identifiées. On suppose que le temps d'attente pour les deux queues identifiées est une variable aléatoire (X, Y) (X représentant la queue I et Y la queue II) dont la densité est

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} \lambda_1 \lambda_2 e^{-\lambda_1 x - \lambda_2 y} & \text{si } x \geq 0 \text{ et } y \geq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Déterminer les lois marginales de X et de Y.
2. Quelle est la probabilité pour que le temps d'attente sur la queue I soit inférieur ou égal au temps d'attente sur la queue II.
3. Montrer que les variables aléatoires X et Y sont indépendantes.
4. Calculer $\mathbb{E}(XY)$.
5. Que vaut la covariance entre X et Y: $\mathrm{Cov}(X, Y)$?

Exercice 5. Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires représentant la dépense mensuelle d'un couple où X représente l'homme et Y la femme. On suppose que la densité de (X, Y) est

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2}{(b-a)^2} & \text{si } a < x \leq y < b \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

où $0 < a < b$.

1. Quelle est la probabilité pour que l'homme dépense plus que la femme.
2. Quelle est la probabilité pour que les dépenses de la femme soient au moins le double de celles de l'homme. Faites l'application pour $a = 1000$€ et $b = 1500$€.
3. Déterminer la densité de X et celle de Y.
4. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes?
5. On pose $a = 1000$€ et $b = 1500$€.
   (a) Quelle est la probabilité pour que l'homme dépense au moins 1100€.
   (b) Quelle est la probabilité pour que la femme dépense au moins 1100€.
6. Déterminer la covariance entre X et Y: $\mathrm{cov}(X, Y)$. En déduire le coefficient de correlation linéaire entre X et Y.