Méthodologie

1 Les révisions

Quand vous révisez, il faut travailler le cours ET les exercices des TD (vous pouvez aussi vous entrainer sur des exercices trouvés sur internet) :

- il est important de connaître le cours, car les exercices utilisent (voir illustrent) les résultats du cours (les théorèmes, propositions, lemmes, corollaires, remarques, les astuces vus dans les preuves,...). Si vous ne les connaissez pas, dans certains exercices, vous ne pourrez rien faire.
- travailler les exercices est important pour plusieurs raisons :
- la première raison est pragmatique : les exercices que vous aurez en DS/partiel/examen sont souvent proches de ceux vus en TD (c'est surtout vrai en L1/L2, mais moins en master).
- la deuxième raison, c'est qu'en travaillant sur les exercices vous vous familiserez avec le cours (vous apprendrez plus facilement les définitions en vous habituant à les manipuler plutôt qu'en les apprenant par coeur sans réellement comprendre comment s'en servir).
- il y a une autre raison pour laquelle il est fondamentale de faire des exercices. Il y a deux raisons qui peuvent faire que vous n'arrivez pas à faire un exercice : soit vous ne connaissez pas assez votre cours (dans ce cas il faut l'apprendre...), soit vous n'avez pas vu une astuce à faire. Dans le deuxième cas, on ne peut pas vraiment vous le reprochez, mais c'est important de passer du temps sur l'exercice (même si vous n'avez pas réussi à le faire), car quand vous verrez la correction, vous verrez l'astuce qui vous a manquée : il faudra alors que vous la reteniez et que vous la compreniez (pourquoi elle est vraie, en quoi elle aide à résoudre l'exercice,...). Quand on regarde un corrigé sans avoir vraiment essayé de faire l'exercice soi-même, on passe souvent à côté de beaucoup de détails techniques et on ne se rend pas compte des astuces à utiliser.
- si vous ne comprenez pas la correction d'un exercice, vous devez poser des questions. Ce n'est pas grave de ne pas réussir un exercice la première fois qu'on le voit, mais ça l'est de ne pas le réussir la deuxième fois...

En ce qui concerne la question du temps de révision : il n'y a pas de réponse générale. Cela dépend des étudiants. Il faut que vous soyez honnête avec vous-même et que vous vous posiez cette question : est-ce que je connais bien le cours (au minimum les définitions et les résulats principaux, au mieux les astuces utilisées dans les preuves et les résultats intermédiaires) et est-ce que je sais refaire tous les exercices que j'ai vus en TD ? Si la réponse est non, vous n'avez pas assez révisé...

Pour réviser efficacement, essayez de vous imposer de réviser au fur et à mesure du semestre. N'attendez pas la veille de l'examen pour réviser l'intégralité du cours. Il faut vous donner le temps d'assimiler toutes les notions du cours. Dans l'idéal, à la fin de chaque feuille de TD, vous devez être au point sur toutes les notions de la feuille de TD (et de temps en temps revenir sur les feuilles de TD précédentes pour vous assurer que vous maitriser encore les notions correspondantes. Si ce n'est pas le cas il faut les retravailler, et éventuellement poser des questions au responsable du cours ou au chargé de TD).

2 Résolution d'exercices

Quand vous lisez un énoncé, il y a plusieurs réflexes à avoir :

— déterminer les hypothèses utiles de l'énoncé pour répondre à la question (cela dépend de ce qu'il faut démontrer)
— déterminer ce qu'il faut démontrer (un énoncé, c'est souvent une phrase en français. Il faut être capable de dire ce qu'elle signifie mathématiquement, autrement vous aurez dû mal à résoudre l'exercice...)

Une fois ce travail effectué, pour résoudre l'exercice, il faut faire un raisonnement formel en appliquant successivement des résultats du cours (qu'il faut donc connaître) et des astuces que vous devez trouver vous-même. La vraie question délicate c'est : comment savoir quelles propriétés du cours appliquées à quels moments, et comment trouver les astuces ? Bien entendu, il n'y a pas de réponse miracle. Parfois c'est plus ou moins évident, parfois c'est délicat. D'où l'importance de s'entrainer à faire des exercices : plus vous en ferez plus vous verrez ce genre d'astuces et plus vous serez familié avec votre cours et vous comprendrez mieux comment les résultats du cours s'utilisent.

Une technique utile pour savoir quoi faire dans un exercice est de faire un dessin. Un dessin N'EST PAS une preuve, mais ça peut aider à "guider" vers une preuve (le dessin se fait au brouillon, ce n'est pas la peine de le faire sur la copie). Réussir à représenter les hypothèses et le résultat à démontrer sur un dessin, et surtout réussir à rendre rigoureux ce qui "est évident" sur un dessin est un point vraiment important pour résoudre les exercices.

On illustrera ce point au cours des séances (sur les définitions et les exercices).

3 Raisonnement formel

Une proposition P est une phrase qui peut être vraie ou fausse. Par exemple $P = "1 \leq 3"$ est une proposition vraie, et $Q = "2 < 2"$ est une proposition fausse.

Une proposition P peut dépendre d'un paramètre, auquel cas P est une fonction à valeurs dans $\{\text{Vrai}, \text{ Faux}\}$. Par exemple, on peut poser pour $x \in \mathbb{R}$, $P(x) = "x \leq 4"$. On a alors $P(1) = \text{Vrai}$ et $P(8) = \text{Faux}$.

3.1 L'implication et l'équivalence

Etant donné deux propositions P, Q, on peut définir la proposition $P \Rightarrow Q$ qui signifie "si P est vraie alors Q est vraie", ce qui est équivalent à "P est fausse OU Q est vraie" (le OU étant inclusif).

Beaucoup d'exercices consistent à démontrer qu'une implication est vraie : si on note H la proposition correspondante aux hypothèses de l'exercice, et R celle qui correspond au résultat à démontrer, alors résoudre l'exercice revient à démontrer que la proposition $H \Rightarrow R$ est vraie. Pour démontrer cette implication, il y a trois méthodes :

— on suppose que H est vraie, et on démontre que R est vraie
— contraposée : on démontre que la proposition $\text{NON}(R) \Rightarrow \text{NON}(H)$ est vraie (en se ramenant à la première méthode)
— absurde : on démontre que la proposition H ET $\text{NON}(R) \Rightarrow Faux$ est vraie (càd on suppose que H est vraie et que R est fausse, et on démontre un truc faux)

Etant donné deux propositions P, Q, on peut définir la proposition $P \Leftrightarrow Q$ qui signifie "les propositions P et Q sont équivalentes" (càd qu'elles ont la même valeur de vérité : elles sont soit toutes les deux fausses, soit toutes les deux vraies). Pour démontrer que la proposition $P \Leftrightarrow Q$ est vraie, il faut démontrer que les propositions $P \Rightarrow Q$ et $Q \Rightarrow P$ sont toutes les deux vraies.

3.2 Les quantificateurs

Etant donné une proposition dépendant d'un paramètre $P : E \to \{\text{Vrai, Faux}\}$, on peut définir les proposition $\forall x \in E, P(x)$ qui signifie "pour tout $x \in E, P(x)$ est vraie", et $\exists x \in E, P(x)$ qui signifie "il existe (au moins) un $x \in E$ tel que $P(x)$ est vraie".

Pour démontrer que la proposition $\forall x \in E, P(x)$ est vraie, on peut utiliser plusieurs méthodes :

— considérer un élément QUELCONQUE $x \in E$, et montrer que $P(x)$ est vraie

— absurde : montrer que la proposition $\exists x \in E, \text{NON}(P(x))$ est fausse

Pour démontrer que la proposition $\exists x \in E, P(x)$ est vraie, on peut utiliser plusieurs méthodes :

— considérer un élément PARTICULIER $x \in E$, et montrer que $P(x)$ est vraie

— absurde : montrer que la proposition $\forall x \in E, \text{NON}(P(x))$ est fausse

Exemple. Soit $P(x) = "x \leq 3"$. La proposition $\forall x \in \mathbb{R}, P(x)$ est fausse, mais $\exists x, P(x)$ est vraie (il suffit de considérer $x = 2$ par exemple)

Exercice 1. Ecrire les propositions suivantes à l'aide de connecteurs logiques et de quantificateurs, et dire si elles sont vraies ou fausses (sauf pour les 3) et 4)) :

1) il existe trois réels tous distincts et tous strictement inférieurs à un réel donné arbitraire
2) il existe un rationnel compris entre $\sqrt{2}$ et $\sqrt{3}$
3) la fonction f est croissante (où $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction donnée)
4) la fonction f n'est pas strictement croissante (où $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction donnée)
5) on peut associer à n'importe quel réel, un nombre égal au carré du premier
6) on peut associer à n'importe quel réel, un nombre dont le carré est le premier

Exercice 2. Dire si les propositions suivantes sont vraies ou fausses :

1) $\forall x \in \mathbb{R}, (x \leq 2 \Rightarrow x \leq 4)$
2) $\forall (n, p) \in \mathbb{N}^2, (n \text{ et } p \text{ sont pairs} \Leftrightarrow n + p \text{ est pair})$

3.3 Application à la résolution d'équations

Résoudre une équation (ou un système), c'est trouver l'ensemble des valeurs des variables pour laquelle l'équation est vraie. Par exemple, si on veut résoudre dans $\mathbb{R}$, $2x+7 = 10$. Le raisonnement formel est le suivant :

— on introduit $S = \{x \in \mathbb{R} \ : \ 2x + 7 = 10\}$

— on raisonne par équivalence : pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$x \in S \Leftrightarrow 2x + 7 = 10 \Leftrightarrow x = 3/2 \Leftrightarrow x \in \{3/2\}$$

— on conclut alors que $S = \{3/2\}$ (ceci est vrai uniquement car on a raisonné par équivalence !)

L'objectif n'est pas de vous apprendre à faire la deuxème étape (je pars du principe que vous savez la faire), mais de vous faire prendre conscience que même dans les méthodes ultra-classiques il y a des détails techniques qu'il faut toujours avoir en tête.

Exercice 3. Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ les équations ou systèmes d'équations suivants :

1) $\begin{cases} x^2 + y & = 6 \\ y^2 & = 4 \end{cases}$

2) $\begin{cases} x^2 + y & = -4 \\ y^2 & = 9 \end{cases}$

3) $2x + 7y + 5 = 4$

Exercice 4. Dire pourquoi le raisonnement suivant est faux :

On veut résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $x^2 + x + 1 = 0$.

On sait alors que $x(x+1) = -1$, et aussi que $1 = -x^2 - x$.

En remplaçant 1 par $-x^2-x$ dans la première équation de la ligne ci-dessus, on a $x(x-x^2-x) = -1$.

D'où $-x^3 = -1$ et donc $x = 1$ est la seule solution réelle de $-x^3 = -1$. Donc l'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$ de $x^2 + x + 1 = 0$ est $\{1\}$.

4 Rappel de cours

Définition (fonction). Une fonction est un triplet d'ensembles $f = (E, F, \Gamma)$ vérifiant :

— $\Gamma \subseteq E \times F$,

— pour tout $x \in E$, il existe un unique $y \in F$ tel que $(x, y) \in \Gamma$.

Par définition, E est l'ensemble de départ de f, F est l'ensemble d'arrivée f, Γ est le graphe de f, pour chaque $x \in E$ on note $f(x)$ l'unique élément de F tel que $(x, f(x)) \in \Gamma$. On dit que $f(x)$ est L'image par x de f, et que x est UN antécédent de $f(x)$ par f (l'image est unique, mais il peut y avoir plusieurs antécédents).

Dans la suite, on considère des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ pour simplifier les notations. Mais ces définitions se généralisent à des fonctions définies sur des intervalles.

Définition (limite finie). Soient $x_0 \in \mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

— On dit que f tend vers $l \in \mathbb{R}$ en x_0 ssi :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in \mathbb{R}, |x - x_0| < \eta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon.$$

— On dit que f tend vers $l \in \mathbb{R}$ en $+\infty$ ssi :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists M > 0, \forall x \in \mathbb{R}, x > M \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon.$$

Définition (limite infinie). Soient $x_0 \in \mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

— On dit que f tend vers $+\infty$ en x_0 ssi :

$$\forall M > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in \mathbb{R}, |x - x_0| < \eta \Rightarrow f(x) > M.$$

— On dit que f tend vers $+\infty$ en $+\infty$ ssi :

$$\forall M_1 > 0, \exists M_2 > 0, \forall x \in \mathbb{R}, x > M_2 \Rightarrow f(x) > M_1.$$

Définition (continuité). Soient $x_0 \in \mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. On dit que f est continue en x_0 ssi f tend vers $f(x_0)$ en x_0. On dit que f est continue (sur son ensemble de définition) ssi pour tout $x \in \mathbb{R}$, f est continue en x.

Définition (fonction bornée). Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et I une partie de $\mathbb{R}$. On dit que f est majorée (resp. minorée) sur I ssi :

$$\exists M \in \mathbb{R} \text{ (resp. } m \in \mathbb{R}), \forall x \in I, f(x) \leq M \text{ (resp. } f(x) \geq m).$$

On dit que f est bornée si f est minorée et majorée.

Proposition. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue (sur $\mathbb{R}$). Alors f est bornée sur tout intervalle fermé et borné :

$$\forall a < b, \exists M > m, \forall x \in [a, b], m \leq f(x) \leq M.$$

Remarque : avec les notations ci-dessus, on dit que m (resp. M) est un minorant (resp. majorant) de f sur $[a, b]$. Par définition, la borne supérieure de f est le plus petit des majorants, et la borne inférieure est le plus grand des majorants.

Définition (bornes d'un ensemble). Soit A une partie de $\mathbb{R}$. Un réel M est un majorant (resp. m est un minorant) de A si tous les éléments de A sont inférieurs ou égaux à M (resp. supérieurs ou égaux à m). La borne supérieure (resp. inférieure) de A, notée $\sup(A)$ (resp. $\inf(A)$) est le plus petit des majorants (resp. le plus grand des minorants).

Proposition. Soit A une partie de $\mathbb{R}$ non vide. Si A est majorée (resp. minorée), alors la borne supérieure (resp. inférieure) de A existe et est finie. Les bornes de A (si elles existent) sont des limites de suites à valeurs dans A.

Théorème (valeurs intermédiaires). Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $\mathbb{R}$. Pour tout $a < b$, si $f(a) < f(b)$ (resp. $f(b) < f(a)$) alors pour tout $d \in [f(a), f(b)]$ (resp. $d \in [f(b), f(a)]$), il existe $c \in [a, b]$ tel que $d = f(c)$.

Définition (suite convergeante). Une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel l ssi :

$$\forall \varepsilon, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |u_n - l| < \varepsilon.$$

Définition (dérivée). Soient $x_0 \in \mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. On dit que f dérivable en x_0 ssi $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ admet une limite finie quand x tend vers x_0. Dans ce cas, on note $f'(x_0)$ cette limite (c'est la dérivée de f en x_0).

Si f est dérivable en tout point d'un intervalle ouvert I, on dit que f est dérivable sur I. Dans ce cas, la dérivée de f est la fonction f'.

Définition (primitive). Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. On appelle primitive de f toute fonction F vérifiant $F' = f$.

Définition (intégrale). Soient $a < b$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que f est continue sur $[a, b]$. Si f admet une primitive F sur $[a, b]$, on peut définir l'intégrale de f sur $[a, b]$ par

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Remarque : si f est une fonction positive, l'intégrale de f sur un intervalle correspond à l'aire sous la courbe de f sur cette intervalle. Si f est négative, l'intégrale correspond à l'opposé de l'aire sur la courbe.

5 Exercices

Exercice 5. Calculer les intégrales suivantes :
- $\int_1^2 x^2 dx$
- $\int_0^t x^n dx$ (où $n \in \mathbb{N}$)
- $\int_0^2 \cos(x) dx$
- $\int_0^t e^{a \cdot x} dx$ (où $a \in \mathbb{R}^*$)

Exercice 6. Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle convergeante. Montrer que la limite de u est unique.

Exercice 7. Démontrer le théorème des gendarmes : soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (v_n)_{n\in\mathbb{N}}, (w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trois suites réelles telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n \leq v_n \leq w_n,$$

et telles que u et w convergent vers une même limite l. Alors v converge aussi vers l.

Exercice 8. Soit $f : x \in]0,1] \mapsto 1/x \in \mathbb{R}$. La fonction f est-elle bornée sur $]0,1]$?

Exercice 9. Montrer que la composée de deux fonctions continues est continue.

Exercice 10. Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et I une partie de $\mathbb{R}$. Montrer que les propositions "f est bornée sur I" et "$|f|$ est majorée sur I" sont équivalentes.

Exercice 11. Montrer que $f : x \in \mathbb{R} \mapsto |x| \in \mathbb{R}$ est continue.

Exercice 12. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. Montrer que u converge vers 1 si et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n > N, |u_n - 1| \leq \varepsilon.$$

Exercice 13. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Dire si les propositions suivantes sont vraies :
— f est continue $\Longrightarrow |f|$ est continue
— $|f|$ est continue $\Longrightarrow f$ est continue

Exercice 14. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et admettant des limites finies en $+\infty$ et $-\infty$. Montrer que f est bornée sur $\mathbb{R}$.

Exercice 15. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable sur $\mathbb{R}$. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 16. Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ continue sur $[0,1]$. Montrer que f admet un point fixe.

Exercice 17. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}, f(x)^2 = 1$. Que pouvez-vous dire sur la fonction f ?

Exercice 18. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Dire si les propositions suivantes sont équivalentes :
— f admet une limite finie en $+\infty$
— la suite $(f(n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Exercice 19. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction périodique et continue. Montrer que f est bornée.

Exercice 20 (*). Soit $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ continues telles que $f(a) < g(a)$ et $f(b) > g(b)$. Montrer qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que pour tout $x \in]c,b], f(x) > g(x)$.

Exercice 21 (*). Résoudre l'exercice précédent en raisonnant par l'absurde.

Exercice 22 (**). Démontrer le théorème des valeurs intermédiaires.