(6)

Vendredi 29 Juillet.

1)

A comparison of the finite dimensional marginals of ratios for the Brownian bridge and Brownian motion.

By comparing the relations (3'') and (6) in Document #4: "from Brownian motion to the Brownian bridge", one obtains the following absolute continuity relationship between the distributions of $(R^b_1, \dots, R^b_n)$ and $(R_1, \dots, R_n)$.

Theorem: For every $f \geq 0$, one has:

(1) $$E\left[f(R^b_1, R^b_2, \dots, R^b_n)\right] = E\left[D_n(R_1, \dots, R_n)\, f(R_1, \dots, R_n)\right]$$

where:

(2) $$D_n(r_1, \dots, r_n) = (n+1)\sqrt{\frac{\pi}{2}} \int_0^\infty dx\, e^{-\frac{x^2}{2}\theta_n(r_1,\dots,r_n)}\, \varphi_{n+2}\left(\frac{x^2}{2}\right),$$

(3) $$\theta_n(r_1, r_2, \dots, r_n) = \frac{1}{r_n} + \frac{1}{r_n r_{n-1}} + \dots + \frac{1}{r_n r_{n-1} \cdots r_1}.$$

(4) $$\varphi_{n+2}(\lambda) = E\left[\exp - \lambda \Sigma_{n+2}\right], \text{ where: } \Sigma_{n+2} = 1 + R_{n+2} + R_{n+2}R_{n+3} + \dots$$

(This is not so bad; see later).

Proof of the theorem: We start from (3''), on p. 2, of Document #4; and we use:

$$\frac{1}{\sqrt{r}} = \int_0^\infty dt\, e^{-tr} \frac{t^{1/2 - 1}}{\Gamma(\frac{1}{2})\ (\equiv \sqrt{\pi})}$$

Thus, we obtain:

$$(5)\quad E\left[f(R_1^b, R_2^b, \dots, R_n^b)\right] = \frac{\pi}{2} E\left[f(R_2, \dots, R_{n+1})\, \Phi_{n+2}\right],$$

where: $$\Phi_{n+2} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{dt}{\sqrt{t}}\, e^{-t(1+R_2+R_2R_3+\dots+R_2R_3\cdots R_n)}\, \varphi_{n+2}(tR_2R_3\cdots R_n$$

$$(6)\quad = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{(R_2R_3\cdots R_{n+1})^{1/2}} \int_0^\infty dx\, e^{-\frac{x^2}{2}\theta_n(R_2,\dots,R_{n+1})}\, \varphi_{n+2}\left(\frac{x^2}{2}\right),$$

after elementary changes of variables.

Then, we use the relationship between the laws of $(R_2, \dots, R_{n+1})$ and $(R_1, \dots, R_n)$ which is given in the Proposition in Document #4, i.e:

$$(7)\quad E\left[f(R_2, \dots, R_{n+1})\right] = E\left[(n+1)(R_1R_2\cdots R_n)^{1/2} f(R_1, R_2, \dots, R_n)\right].$$

Finally, by combining (5), (6) and (7), we obtain the Theorem $\square$

I would now like to identify the law of: $\Sigma_n \overset{\text{def}}{=} 1+R_n+R_nR_{n+1}+\dots$

I believe that:

$$(8)\quad \underline{\Sigma_n \overset{(\text{law})}{=} 1+g^{(1)}+g^{(2)}+\dots+g^{(n)}},$$

where $g^{(1)}, g^{(2)}, \dots, g^{(n)}$ are n independent copies of $g_{H(1)} \equiv H^{(1)}-1$.

Such copies are "seen" / realized / <u>on the picture in Document #2</u>, as:

$$g^{(1)} \equiv g_{H(1)}\ ;\ g^{(2)} = g_{H(2)} - d_{H(1)}\ ;\ \dots\ ;\ g^{(n)} = g_{H(n)} - d_{H(n-1)}.$$

Now, recall that: (9) $E\left[\exp\left(-\frac{\lambda^2}{2}H^{(1)}\right)\right] = \frac{1}{\psi(\lambda)}$,

where $\psi(\lambda) = E\left[\cosh(\lambda m_1)\right] = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\lambda e^{\lambda^2/2} + \int_0^\infty \frac{dy\, e^{-\frac{\lambda^2}{2}y}}{(1+y)^{3/2}}$

$$= e^{\lambda^2/2}\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\lambda + \int_1^\infty \frac{dx}{x^{3/2}} e^{-\frac{\lambda^2 x}{2}}\right)$$

Hence, since: $g^{(1)} = H^{(1)} - 1$, we obtain:

$$E\left[\exp\left(-\frac{\lambda^2}{2}g^{(1)}\right)\right] = \frac{e^{\lambda^2/2}}{\psi(\lambda)} \equiv \frac{1}{\tilde{\psi}(\lambda)}, \quad \text{with:}$$

$$(10) \qquad \tilde{\psi}(\lambda) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\lambda + \frac{1}{2}\int_1^\infty \frac{dx}{x^{3/2}} e^{-\frac{\lambda^2 x}{2}},$$

attention à la correction avec $(1/2$

$(\lambda \to 0$; on veut: $\tilde{\psi}(0)$

so that:

$$\varphi_n\left(\frac{\lambda^2}{2}\right) \overset{\text{def}}{=} E\left[\exp\left(-\frac{\lambda^2}{2}\Sigma_n\right)\right]$$

$$(\text{from } (8)) \qquad = \exp\left(-\frac{\lambda^2}{2}\right)\frac{1}{(\tilde{\psi}(\lambda))^n}$$

Consequently, we can write the density $D_n(r_1, r_2, \cdots, r_n)$ in formula (2) as:

$$(11) \quad D_n(r_1, \cdots, r_n) = (n+1)\sqrt{\frac{\pi}{2}}\int_0^\infty dx\; e^{-\frac{x^2}{2}(1+\theta_n(r_1,\cdots,r_n))}\frac{1}{(\tilde{\psi}(x))^{n+2}}$$

This gives us an interesting (and intriguing!) martingale with respect to

$\mathcal{R}_n = \sigma\{R_1, R_2, \cdots, R_n\}$; more precisely, recall that (cf: Thm 6. in Document # 2) the V_n^{ξ}'s are related to the Σ_n's and $\theta_n(R_1, \cdots, R_n)$ as follows:

$$(11_2) \qquad \frac{1}{V_{n+1}} = \left(1 + \theta_n(R_1, \cdots, R_n)\right) + R_{n+1}\Sigma_{n+2}$$

The formulae (11) and (12) seem to call for an interpretation of the $(\mathcal{R}_n)$ martingale

$$D_n(R_1, R_2, \dots, R_n)$$

as the projection on $(\mathcal{R}_n)$ of a martingale with respect to the sequence $(\mathcal{V}_{n+1})$ where:

$$\mathcal{V}_{n+1} = \sigma(V_1, V_2, \dots, V_{n+1}) \equiv \sigma(R_1, R_2, \dots, R_n, V_{n+1}).$$

Samedi 30 Juillet.

Une généralisation des calculs du Document (6) aux processus de la "hiérarchie".

On cherche à étendre les résultats de (6) aux processus $(X_u, u \leq 1)$ dont la loi P_α est donnée par :

$$(*) \qquad E_{(\alpha)}\left[F(X_u, u \leq 1)\right] \stackrel{def}{=} E\left[\frac{c_\alpha}{(\sqrt{\tau_1})^\alpha} F\left(\frac{B_{u\tau_1}}{\sqrt{\tau_1}}, u \leq 1\right)\right] \quad (**)$$

(la constante de normalisation c_α est donnée par : $1 = c_\alpha E(|N|^\alpha)$).

Remarquons : $\tau_1 = \sum_{k=1}^{\infty} V_k(\tau_1) = V_1(\tau_1)\left(1 + \frac{V_2(\tau_1)}{V_1(\tau_1)} + \frac{V_3(\tau_1)}{V_1(\tau_1)} + \cdots + \frac{V_n(\tau_1)}{V_1(\tau_1)} + \cdots\right)$

On a donc, en notant provisoirement $R'_i = \frac{V_{i+1}(\tau_1)}{V_i(\tau_1)}$:

$$E_{(\alpha)}\left[F(R_k, k \geq 1)\right] = c_\alpha \, E\left[\frac{1}{(V_1(\tau_1))^{\alpha/2}} \frac{F(R'_k, k \geq 1)}{(1 + R'_1 + R'_1 R'_2 + \cdots + R'_1 R'_2 \cdots R'_j + \cdots)^{\alpha/2}}\right]$$

Or, comme on l'a déjà remarqué dans le Document (4), on a :

$$\frac{1}{\left(\frac{\pi}{2} V_1(\tau_1)\right)^{1/2}} = \lim_{n\to\infty} n \left(R'_1 R'_2 \cdots R'_n\right)^{1/2}$$

En conséquence, on a :

$$(1) \quad E_{(\alpha)}\left[F(R_k, k \geq 1)\right] = \lim_{n\to\infty} c_\alpha \, E\left[F((R_k, k \geq 1)) \frac{\left(n\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right)^\alpha (R_1 \cdots R_n)^{\alpha/2}}{(1 + R_1 + R_1 R_2 + \cdots + R_1 R_2 \cdots R_j + \cdots)^{\alpha/2}}\right]$$

(Une fois de plus, on a utilisé la propriété pour τ_1 d'être admissible, c'est à dire que la suite $(R'_k, k \geq 1)$ a même loi que $(R_k, k \geq 1)$).

Pour simplifier l'écriture, j'utiliserai la notation :

$$\Sigma_1 = 1 + R_1 + R_1 R_2 + \cdots + (R_1 R_2 \cdots R_j) + \cdots$$

(**) D'après BLY, $E_{(\alpha)}\left[F(X_u, u \leq 1)\right] = \left(c_\alpha \sqrt{\frac{2}{\pi}}\right) E\left[\left(L_1^{br}\right)^{\alpha-1} F(b(u), u \leq 1)\right]$.

(Dans une 1ère lecture, cette page peut être omise, mais les calculs sont utilisés dans le 2nd essai...) 2)

p. 3 et suivantes

1er essai : On ne va plus considérer maintenant que des fonctions F ne dépendant que d'un nombre fini de coordonnées ~~R_{1}~~ $(r_1, \dots, r_p)$, avec p fixé, ce qui va nous permettre, pour n suffisamment grand, de remplacer :

$$\left(n\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right)^{\alpha} \frac{(R_1 \cdots R_n)^{\alpha/2}}{(\Sigma_1)^{\alpha/2}}$$

par sa projection sur $\mathcal{R}_n$, c'est à dire :

$$\Gamma_n^{(\alpha)} \overset{\text{def}}{=} \left(n\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right)^{\alpha} (R_1 \cdots R_n)^{\alpha/2} \, E\left[\frac{1}{(\Sigma_1)^{\alpha/2}} \,\middle|\, \mathcal{R}_n\right].$$

J'utilise maintenant la formule : $\displaystyle\frac{1}{r^{\alpha/2}} = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \int_0^\infty dt\, e^{-tr}\, t^{\frac{\alpha}{2}-1}$,

dont je déduis :

$$E\left[\frac{1}{(\Sigma_1)^{\alpha/2}} \,\middle|\, \mathcal{R}_n\right] = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \int_0^\infty dt\, t^{\frac{\alpha}{2}-1} e^{-t(1+R_1+R_1R_2+\cdots+R_1\cdots R_n)} \boxed{\varphi_{n+1}(tR_1 \cdots R_n)}$$

$$= \frac{1}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)(R_1 \cdots R_n)^{\alpha/2}} \int_0^\infty dt\, t^{\frac{\alpha}{2}-1} e^{-t\,\theta_n(R_1,\dots,R_n)} \varphi_{n+1}(t).$$

et on a donc obtenu la formule :

$$\Gamma_n^{(\alpha)} = \left(n\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right)^{\alpha} \frac{1}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \int_0^\infty dt\, t^{\frac{\alpha}{2}-1} e^{-t\,\theta_n(R_1,\dots,R_n)} \varphi_{n+1}(t).$$

Remarque : Notons toutefois que $\left(\Gamma_n^{(\alpha)}, n \geq 1\right)$ n'est pas une $(\mathcal{R}_n)$ martingale ; On ne peut donc pas remplacer l'égalité :

$$E_{(\alpha)}\left[F(R_1, -, R_p)\right] = c_\alpha \lim_{n\to\infty} E\left[F(R_1, -, R_p)\, \Gamma_n^{(\alpha)}\right]$$

par. (Faux) $\quad E_{(\alpha)}\left[F(R_1, -, R_p)\right] = c_\alpha E\left[F(R_1, -, R_p)\, \Gamma_p^{(\alpha)}\right]$

La formule (3) ci-dessous est la formule correcte

<u>2nd essai :</u> On va utiliser maintenant un changement de probabilités adéquat (= bien adapté à notre problème....).

On peut écrire, en partant de (1) (on note, pour simplifier : $F_p \equiv F(R_1, -, R_p)$

$$(1') \quad E_{(\alpha)}(F_p) = \lim_{n\to\infty} c_\alpha\, E\left[F_p \frac{\left(n\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right)^\alpha (R_1 \cdots R_n)^{\alpha/2}}{\left(1 + R_1 + R_1R_2 + \cdots + (R_1R_2\cdots R_n)\right)^{\alpha/2}}\right]$$

(par convergence dominée).

D'autre part, notons la relation d'absolue continuité suivante qui étend la 1re assertion de la Proposition du Document (4) :

<u>Proposition :</u> <u>Pour tout k entier, on a :</u>

$$(2) \quad E\left[f(R_{k+1}, R_{k+2}, \dots, R_{k+n})\right] = E\left[\frac{(k+n)!}{k!\, n!}(R_1 \cdots R_n)^{k/2} f(R_1, — R_n)\right]$$

<u>Démonstration :</u> Immédiate <u>à partir des lois des R_i</u>, et de leurs propriétés d'indépendance

Considérons, pour l'instant, le cas $\alpha = k$ qui est déjà bien intéressant ($\alpha = 1$ donne le calcul pour le pont brownien), et remarquons que : $\frac{(k+n)!}{n!} \underset{n\to\infty}{\sim} n^k$.

Posons : $$\Delta_n^{(k)} \overset{\text{def}}{=} \frac{(k+n)!}{k!\, n!}(R_1 R_2 \cdots R_n)^{k/2}.$$

On peut maintenant écrire le membre de droite de (1') comme : $\left[c'_k \equiv c_k\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right)^k\right]$

$$\lim_{n\to\infty} c'_k\, E\left[F(R_1, R_2, -, R_p)\frac{\Delta_n^{(k)}}{\left(1 + R_1 + R_1R_2 + \cdots + (R_1R_2\cdots R_n)\right)^{k/2}}\right]$$

$$\underset{(\text{d'après } (2))}{=} \lim_{n\to\infty} c'_k\, E\left[F(R_{k+1}, R_{k+2}, -, R_{k+p})\frac{1}{\left(1 + R_{k+1} + R_{k+1}R_{k+2} + — + R_{k+1} — R_{k+n}\right)^{k/2}}\right]$$

$$= c'_k\, E\left[F(R_{k+1}, — R_{k+p})\frac{1}{(\Sigma_{k+1})^{k/2}}\right]$$

On continue le calcul du membre de droite de (1') en explicitant (de la même façon que ce qui a été fait dans le 1er essai ci-dessus) :

$$E\left[\frac{1}{(\Sigma_{k+1})^{k/2}} \Big| \mathcal{R}_{k+p}\right]$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\frac{k}{2})}\int_0^\infty dt\, t^{\frac{k}{2}-1} e^{-t(1+R_{k+1}+\cdots+R_{k+1}\cdots R_{k+p})} \varphi_{k+p+1}(tR_{k+1}\cdots R_{k+p})$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\frac{k}{2})(R_{k+1}\cdots R_{k+p})^{k/2}}\int_0^\infty dt\, t^{\frac{k}{2}-1} e^{-t\,\theta_p(R_{k+1},\ldots,R_{k+p})} \varphi_{k+p+1}(t)$$

puis, on utilise à nouveau la formule (2) [avec p au lieu de n], et le membre de droite de (1') est donc égal à :

$$c'_k\; E\left[\frac{(k+p)!}{k!\,p!}\frac{1}{\Gamma(\frac{k}{2})} F_p \int_0^\infty dt\, t^{\frac{k}{2}-1} e^{-t\,\theta_p(R_1,\ldots,R_p)} \varphi_{k+p+1}(t)\right]$$

On a donc obtenu le

<u>Théorème</u> : <u>Notons toujours</u> $F_p = F(R_1,\ldots,R_p)$. <u>On a alors</u> :

$$(3) \qquad E_{(k)}(F_p) = c'_k \frac{(k+p)!}{k!\,p!\,\Gamma(\frac{k}{2})} E\left[F_p \int_0^\infty dt\, t^{\frac{k}{2}-1} e^{-t\,\theta_p(R_1,\ldots,R_p)} \varphi_{k+p+1}(t)\right]$$

<u>c'est à dire</u> :

$$(3') \qquad \boxed{P_{(k)}\big|_{\mathcal{R}_p} = \left(\frac{c'_k\,(k+p)!}{k!\,p!\,\Gamma(\frac{k}{2})}\int_0^\infty dt\, t^{\frac{k}{2}-1} e^{-t\,\theta_p(R_1,\ldots,R_p)} \varphi_{k+p+1}(t)\right) P}$$

Or, rappelons que, par définition de $E_{(k)}$, on a :

$$(*)\qquad E_{(k)}(F_p) = E\left[\frac{c'_k}{(\sqrt{\tau_1})^k} F_p\right].$$

En conséquence, à l'aide de la formule : $c'_k \equiv c_k\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right)^k k!$ (vue plus haut), on a :

$$(4)\qquad E\left[\frac{1}{(\sqrt{\tau_1})^k}\,\middle|\, R'_1=r_1, —, R'_p=r_p\right] = \left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right)^k \frac{(k+p)!}{p!\,\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}\int_0^\infty dt\; t^{\frac{k}{2}-1} e^{-t\,\theta_p(r_1,—,r_p)}\,\left(\varphi_{k+p+1}(t)\right)$$

Il s'agit maintenant d'expliciter la loi de probabilité $\nu_{a,p}(du)$ sur $\mathbb{R}_+$ telle que :

$$(5)\qquad \int \nu_{a,p}(du)\,u^k = \left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right)^k \frac{(k+p)!}{p!\;\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}\int_0^\infty dt\; t^{\frac{k}{2}-1} e^{-ta}\,\varphi_{k+p+1}(t).$$

(on a posé : $a = \theta_p(r_1, —, r_p)$)

En faisant le changement de variables : $t = \frac{x^2}{2}$ dans l'intégrale, il vient :

$$(5')\qquad \int \nu_{a,p}(du)\,u^k = 2\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)^k \frac{(k+p)!}{p!\;\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}\int_0^\infty dx\; e^{-\frac{x^2 a}{2}}\, x^{k-1}\,\varphi_{k+p+1}\left(\frac{x^2}{2}\right).$$

Rappelons maintenant, d'après le document (6') [: Vérifications] que l'on a :

$$(6)\qquad \varphi_n\left(\frac{x^2}{2}\right) = \frac{e^{\frac{x^2}{2}(n-1)}}{(\Psi(x))^n}$$

On peut donc réécrire la formule (5') sous la forme :

$$(5'')\qquad \left(\frac{k}{2}\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)\right)\left(\int \nu_{a,p}(u)\,u^k\right) = \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)^k\left(\frac{(k+p)!}{p!}\right) k\int_0^\infty dx\; x^{k-1}\,\frac{e^{-\frac{x^2}{2}(a-p-k)}}{(\Psi(x))^{k+p+1}}.$$

Nous allons maintenant effectuer quelques transformations de l'intégrale :

$$I^{(a)}_{k,p} \overset{\text{def}}{=} k\int_0^\infty dx\; x^{k-1}\, \frac{e^{\frac{x^2}{2}k}}{(\psi(x))^{k+1}}\; \frac{e^{-\frac{x^2}{2}(a-p)}}{(\psi(x))^{p}}$$

Rappelons que, d'après le document (6'), on a : $\displaystyle \frac{k\, x^{k-1}\, e^{\frac{x^2 k}{2}}}{(\psi(x))^{k+1}} = \left(e^{\frac{x^2 k}{2}}\, \frac{x^k}{(\psi(x))^k}\right)'$

et donc, par intégration par parties :

$$I^{(a)}_{k,p} = \int_0^\infty dx\; x^k\, \frac{e^{\frac{x^2 k}{2}}}{(\psi(x))^k}\, \gamma_{a,p}(x), \quad \text{où (7) : } \gamma_{a,p}(x) = -\left(\frac{e^{-\frac{x^2}{2}(a-p)}}{(\psi(x))^p}\right)'$$

Nous pouvons maintenant réécrire l'égalité (5'') sous la forme suivante :

$$(8) \qquad E\left[\left(\sqrt{T}\, X_{a,p}\right)^k\right] = E\left[\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\, Z_{1+p}\right)^k\right] \int_0^\infty dx \left(\frac{x\, e^{\frac{x^2}{2}}}{\psi(x)}\right)^k \gamma_{a,p}(x)$$

où, dans le membre de gauche T est une variable exponentielle de paramètre 1, $X_{a,p}$ est une variable indépendante de T, qui a pour loi $\gamma_{a,p}$, et, dans le membre de droite, Z_{1+p} est une variable gamma de paramètre $(1+p)$, i.e.

$$P(Z_{1+p} \in dt) = \frac{t^p e^{-t}\, dt}{(p!)}.$$

Le membre de gauche de (8) admet une interprétation simple comme

$$(8') \qquad E\left[(L_T)^k \mid R''_1 = r_1, \ldots, R''_p = r_p\right]$$

où $R''_i \equiv \dfrac{V_{i+1}(T)}{V_i(T)}$, et T est une variable exponentielle de paramètre 1, indépendante du mouvement brownien $(B_t, t \geq 0)$.

[Ceci est une conséquence facile du caractère admissible de τ_1].

En ce qui concerne le membre de droite de (8), explicitons la fonction $\gamma_{a,p}$ définie par (7) :

$$(9) \quad \gamma_{a,p}(x) = \frac{e^{-\frac{x^2}{2}(a-p)}}{(\Psi(x))^{p+1}} \left\{ x(a-p)\Psi(x) + p\Psi'(x) \right\}$$

Or, on a ([Message #1, Caracas, July 11th]) : $\dfrac{1}{\Psi(\lambda)} = (1+\lambda^2) - \dfrac{\lambda\Psi'(\lambda)}{\Psi(\lambda)}$.

identité que l'on peut réécrire sous la forme : $\Psi'(\lambda) = \left(\lambda + \frac{1}{\lambda}\right)\Psi(\lambda) - \frac{1}{\lambda}$.

On peut maintenant réécrire (9) sous la forme :

$$(9') \quad \gamma_{a,p}(x) = \frac{e^{-\frac{x^2}{2}(a-p)}}{(\Psi(x))^{p+1}} \left\{ \frac{p}{x}(\Psi(x)-1) + a x \Psi(x) \right\}.$$