

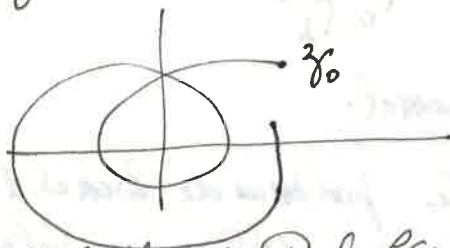
1. Rapport sur le Mvt. Brownien Complexe, et origines du pb.

• $Z_t = X_t + iY_t$ ($t \geq 0$), issue de $z_0 \neq 0$, $|z_0| = a$.

• Paul Lévy : $P_{z_0}^{z_0}(\exists t \geq 0, Z_t = 0) = 0$.

(Dém. de Burgess Davis : e^{Z_t} ne s'annule pas...)

~~Il~~ Il peut être intéressant d'essayer d'étudier l'évolution de $(\theta_t - \theta_0)_{t \geq 0}$, de façon à décrire le nbre. de tours,



[mais, d'après le mthm. de Paul Lévy, (Z_t) ne revient jamais en z_0 .
 Toutefois, si l'on conditionne par $Z_0 = z_0$, mais on n'a plus ce pb.!

Afin, de faire ces calculs, il nous faut étudier $(\theta_t - \theta_0)$:

Or, on a : $Z_t = z_0 \exp \int_0^t \frac{dZ_s}{Z_s}$ (formule d'Ito)

d'où l'on déduit ~~en identifiant~~ : $\log(Z_t(\omega)) - \log(Z_0(\omega)) = \int_0^t \frac{dZ_s}{Z_s}$
 (formule vraie s.t. pour les mvt. conformes)

et, en identifiant parties réelle et imaginaire :

(1) $\log \rho_t - \log \rho_0 = \int_0^t \frac{d\beta_s}{\rho_s}$

(2) $\theta_t - \theta_0 = \int_0^t \frac{d\gamma_s}{\rho_s}$

où : $\beta_t = \int_0^t \frac{X_s dX_s + Y_s dY_s}{\rho_s}$; $\gamma_t = \int_0^t \frac{X_s dY_s - Y_s dX_s}{\rho_s}$

sont 2 mvt. Browniens réels indépendants.

Une nouvelle app. d'Ito α $\rho_t = \sqrt{X_t^2 + Y_t^2}$ donne: 211

$$(3) \quad \rho_t = \rho_0 + \beta_t + \frac{1}{2} \int_0^t \frac{ds}{\rho_s},$$

d'où l'on déduit:

(*) les processus (ρ_t) et (β_t) ont \hat{m} filtration. (d'après (3))

(***) sous $\mathbb{P}_{\mathbb{Z}_0}$, conditionnellement à ρ_0 , $(\rho_t - \rho_0)$ est une mart. Gaussienne centrée, de processus croissant: $\int_0^t \frac{ds}{\rho_s^2}$. (d'après (2) et *).

2. Fonctions, et processus, de Bessel.

a) Rappelons que l'on appelle processus de Bessel d'indice $\nu (\in \mathbb{R})$, et que l'on note $BES(\nu)$, la diffusion à valeurs $\mathbb{R}_+ ds [0, \infty)$, de générateur infinitésimal: $A_\nu = \frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{2\nu+1}{2x} \frac{d}{dx}$

On désigne quelquefois: $d_\nu \equiv 2(\nu+1)$ Comme la "dimension" de $BES(\nu)$: en effet, la partie radiale du mouvement Brownien à valeurs ds \mathbb{R}^d est $BES(\frac{d}{2} - 1)$.

- Dans la suite, l'indice $\nu=0$, d'est à dire: $d_\nu=2$, joue un rôle fond.
 - Def de: $P_a^\nu (a \geq 0; \nu \in \mathbb{R})$ sur l'espace canonique

$\Omega = C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$; $\mathcal{F}_t = \sigma\{\rho_s, s \leq t\}$; $\rho_s(\omega) = \omega(s)$.
 Remarquons qe, pour $\forall t \nu \geq 0$,

$$(4) \quad \beta_t \equiv \rho_t - \rho_0 - \frac{2\nu+1}{2} \int_0^t \frac{ds}{\rho_s}$$

est un $MMA (P_a^\nu, \mathcal{F}_t)$ mart. Brownien ~~réel~~ réel.

A) Le lemme suivant joue un rôle fondamental par la suite. Il permet d'appliquer de passer d'un $BES(\nu)$ à $BES(\mu) \dots (\mu, \nu \geq 0)$.

Lemme: Soit a un réel strictement positif fixe, et T un

(\mathcal{F}_{T+}) temps d'arrêt borne.

Alors, pour toute V.a ≥ 0 , (\mathcal{F}_{T+}) mesurable Y , on a, pour tout couple (μ, ν) d'indices ≥ 0 :

$$(5) \quad E_a^\mu \left[Y \exp \left\{ -\frac{\nu^2}{2} \int_0^T \frac{ds}{\rho^2} \right\} \left(\frac{\rho_T}{a} \right)^\mu \right] \\ = E_a^\nu \left[Y \exp \left\{ -\frac{\mu^2}{2} \int_0^T \frac{ds}{\rho^2} \right\} \left(\frac{\rho_T}{a} \right)^{-\nu} \right].$$

$$\left(= E_a^0 \left[Y \exp \left\{ -\frac{\mu^2 + \nu^2}{2} \int_0^T \frac{ds}{\rho^2} \right\} \right] \right) \quad \text{si l'on admet (5)} \\ \left(= E_a^\lambda \left[Y \left(\frac{\rho_T}{a} \right)^{-\lambda} \right] \right) \quad (\lambda = (\mu^2 + \nu^2)^{1/2}).$$

Démonstration: 1) Il suffit de montrer avec $\mu=0, \nu>0$, que:

$$E_a^0 \left[Y \left(\frac{\rho_T}{a} \right)^\nu \exp \left\{ -\frac{\nu^2}{2} \int_0^T \frac{ds}{\rho^2} \right\} \right] = E_a^\nu (Y).$$

2) Considérons la (P_a^0, \mathcal{F}_t) mart.

locale:
$$L_t^\nu \equiv \exp \left\{ \nu \int_0^t \frac{dB_s}{\rho} - \frac{\nu^2}{2} \int_0^t \frac{ds}{\rho^2} \right\}$$

$$\left(\frac{\rho_t}{a} \right)^\nu = \left(\frac{\rho_t}{a} \right)^\nu \exp \left[-\frac{\nu^2}{2} \int_0^t \frac{ds}{\rho^2} \right], \quad \text{d'après (1).}$$

Rappelons que, d'après Kazamaki, si (M_t) est une m. locale continue,

Nullée en 0, $\exp \left\{ M_t - \frac{1}{2} \langle M \rangle_t \right\}$ est une mart.,

il suffit que $\exp \left\{ \frac{M_t}{2} \right\}$ soit une sous-mart.

Ces critères s'applique bien à $M_t \equiv \nu \int_0^t \frac{dB_s}{\rho}$, car:

$\exp \left\{ \frac{M_t}{2} \right\} = \left(\frac{\rho_t}{\rho_0} \right)^{\nu/2}$, et le Brownien est le prototype des mart. continues.

3) Soit σ une cte ≥ 0 , telle que $T \leq \sigma$. 4
 $Q_\sigma^\gamma \equiv L_\sigma^\gamma (P_a^\circ | \mathcal{F}_\sigma)$ est une proba, d'après C

qui se précède sur \mathcal{F}_σ .

Thm de Girsanov $\Rightarrow \tilde{B}_t \equiv B_t - \gamma \int_0^t ds$ ($t \leq \sigma$)
 est un $(Q_\sigma^\gamma, (\mathcal{F}_t)_{t \leq \sigma})$ ~~processus~~ mouvement brownien.

On réécrit maintenant (3) avec \tilde{B}_t , et on trouve:

$$P_t = \frac{1}{2} a + \tilde{B}_t + \frac{2\gamma+1}{2} \int_0^t ds, \text{ c'est à dire (4),}$$

ie: sous Q_σ^γ , $(P_t, t \leq \sigma)$ est un BES(γ).

$$Q_\sigma^\gamma = P_a^\gamma | \mathcal{F}_\sigma. \text{ confd.}$$

c) Rappel de résultats de Kent:

• Semi-groupe de BES(γ), $\gamma > -1$:
 $\forall x > 0, \forall t > 0, P_t^\gamma(x; dy) = p_t^\gamma(x, y) dy,$

avec: $\left(\frac{y}{x}\right)^{-\gamma} p_t^\gamma(x, y) = \frac{1}{t} e^{-\frac{x^2+y^2}{2t}} I_\gamma\left(\frac{xy}{t}\right) y.$

($\gamma = \frac{d}{2} - 1$; $d \in \mathbb{N}^*$; Ce résultat figure dans Sto. McKean. paragraphe (2.7).)

• T.L. des temps de passage: $\tau_b = \inf \{ t \geq 0 / P_t = b \}.$

$$\left. \begin{array}{l} a, b > 0 \\ \gamma > -1. \end{array} \right\} E_a^\gamma (e^{-\lambda \tau_b}) = \left(\frac{b}{a}\right)^\gamma \frac{\alpha_\gamma(a \sqrt{2\lambda})}{\alpha_\gamma(b \sqrt{2\lambda}).}$$

où $\alpha = K$, si $b < a$; I si $a < b$.

d) Nouveaux résultats.

Théorème 1: $\forall (\mu, \gamma) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}, \quad \sigma > 0:$

$$E_a^\mu \left(\exp \left(-\frac{\gamma^2}{2} \int_0^{\rho_z} \frac{ds}{\rho_s^2} \right) \mid \rho_z = \rho \right) = \frac{I_{\mu^2 + \gamma^2}^{1/2} \left(\frac{\rho a}{\sigma} \right)}{I_\mu \left(\frac{\rho a}{\sigma} \right)}$$

Dém: Une conséquence du lemme est que:

$$E_a^\mu \left[f(\rho_z) \exp \left(-\frac{\gamma^2}{2} \int_0^z \frac{ds}{\rho_s^2} \right) \left(\frac{\rho_z}{a} \right)^{-\mu} \right]$$

$$= E_a^\lambda \left[f(\rho_z) \left(\frac{\rho_z}{a} \right)^{-\lambda} \right], \text{ et on utilise le 1^{er} ris. de } \underline{\text{Kent.}}$$

Corollaire (H 7.2) (page 1)

Thm. 2:

$$E_a^\mu \left[\exp \left\{ -\frac{\gamma^2}{2} \int_0^{z_b} \frac{ds}{\rho_s^2} - \beta z_b \right\} \right]$$

$$= \left(\frac{b}{a} \right)^\mu \frac{I_{\mu^2 + \gamma^2}^{1/2} (a \sqrt{2\beta})}{I_{\mu^2 + \gamma^2}^{1/2} (b \sqrt{2\beta})}$$

$$z_b = \int_0^{z_b} ds = \int_0^{z_b} 1 ds = z_b$$

Corollaire du Thm 1:

$$P_{z_0}^{\gamma} \left(e^{i\gamma(\theta_t - \theta_0)} \mid \rho_t = \rho \right) = E_a^0 \left[\exp \left(-\frac{\gamma^2}{2} \int_0^t \frac{ds}{\rho_s^2} \right) \right]$$

$$= \frac{I_{|\gamma|} \left(\frac{\rho a}{\sigma} \right)}{I_0 \left(\frac{\rho a}{\sigma} \right)}$$

Où: $\gamma \rightarrow \frac{I_{|\gamma|}(r)}{I_0(r)}$
est une Transformée (de u_n).

$$\text{De } \hat{m}, \lambda \longrightarrow \frac{I(\sqrt{2\lambda})(\pi)}{I_0(\pi)}$$

est une T.L. (de η_r).

$\mu_r, \eta_r \longrightarrow$ Distribution de H.W.
 \hookrightarrow Développée de von Mises-Fisher

3. Etude des distributions de H.W.

$$I_\lambda(\pi) = \frac{1}{2i\pi} \int_{C_u} e^{z \cos w - \lambda w} dz$$

$$I_\lambda(\pi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \dots$$

$$\mu_r = \beta_r + \eta_r$$

$$\eta_r = -e^{-\pi m} + m * \int_0^\infty \pi_r(dt) e_L$$

3. Étude des densités de μ_r et η_r

On introduit :

$$I_\lambda(r) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathcal{C}_u} e^{(rch\omega - \lambda\omega)} d\omega$$

Fig 1

A partir de la formule écrite avec $u > 0$, on voit que

$$I_{|\cdot|}(r) \in L^1(d\lambda).$$

D'où, la densité de μ_r est donnée par :

$$\begin{aligned} f_r(\theta) &= \frac{1}{2i\pi I_0(r)} \int_{\mathcal{C}_u} d\omega e^{rch\omega} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda\theta} e^{-|\lambda|\omega} d\lambda \\ &= \frac{1}{2i\pi I_0(r)} \int_{\mathcal{C}_u} d\omega e^{rch\omega} \frac{\omega}{\pi(\theta^2 + \omega^2)}. \end{aligned}$$

De même, comme on sait que $e^{-(\sqrt{2t})x}$ est la T.L. de (T_x) ,

on a :

$$g_r(t) = \frac{1}{2i\pi I_0(r)} \int_{\mathcal{C}_u} d\omega e^{rch\omega} \frac{\omega e^{-\omega^2/2t}}{(2\pi t^3)^{1/2}}.$$

Si l'on passe en variable réelle, donner les formules (5.7) et (5.8)

avec Φ_r , définie sur $\mathbb{R} - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ par :

$$\Phi_r(x) = \frac{x}{\pi} \int_0^\infty e^{-rcht} \frac{dt}{(t^2 + x^2)}$$

Plancherel $= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \kappa\left(\frac{x}{r}\right) e^{-\xi x} dx \cdot 0$

Méthode de Laplace :

$$\Phi_{\frac{1}{\rho_2}}(x-\pi) - \Phi_{\frac{1}{\rho_2}}(x+\pi) \simeq 2\pi_0(x)x^{-2} \quad (|x| \rightarrow \infty)$$

4. Loi de l'indice du lacet Brownien.

(*) Donner le thm. (6.2) (formule (6.4))
en indiquant Alt que l'on doit savoir calculer la loi de $\theta_0 - \theta_0$ qd $z_0 = z_1$, car $z_0 = \rho_0 e^{i\theta_0}$,

et on connaît la loi de $(\theta_0 - \theta_0)$ qd ρ_0 .

(*) puis, plus général, le thm (6.5), avec les diff. formules.

Application triviale au cas où $z_1 = z_0$.

5. Extension de certains résultats en dim. sup à 2

~~On~~ on veut aussi la loi de $\int_0^t ds / \rho_s^2$ / ($B_t = x$).

Gr: $B_t = \rho_t \varphi_t$, avec: $\varphi_t = \theta \left[\int_0^t ds / \rho_s^2 \right]$
donc elle est calculable.

Rappels sur $\rho_t^{(d)}$, etc... / Thm (7.3)

$$\Phi(\nu) = \int e^{i\nu x} f(x) dx = E(e^{iX\nu}).$$

On connaît $\Phi(n)$. $= E(e^{iX\nu} \{ \sum_n \mathbb{1}_{X \in ((2n-1)\pi, (2n+1)\pi)} \})$

$$\Phi(\nu) \quad X = 2\pi N + \bar{X}$$

$$E(e^{i\nu(\bar{X} + 2\pi N)}). \quad (= E(e^{i\nu\bar{X}}) \text{ si } \nu \in \mathbb{Z}).$$

Ainsi, je prends la loi de N cond \bar{t} ν . \bar{X} .

$$= \int_{-\pi}^{+\pi} dP_{\bar{X}}(x) e^{i\nu x} E(e^{2i\pi\nu N} / \bar{X}=x).$$

$BH(S_d)$ est le skew-product de ~~de~~ $LEG(d)$:

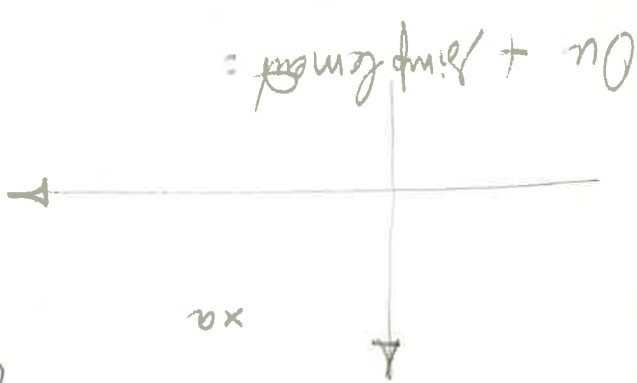
de gen: $\Lambda^{(d)} = \frac{1}{2} (\sin \varphi)^{1-d} \frac{d}{d\varphi} ((\sin \varphi)^{d-1} \frac{d}{d\varphi})$

par un BES $(d-1)$ indépendant \ominus $\left[\int_0^t \frac{ds}{\sin^2 \varphi(s)} \right]$

$$\Lambda^{(d)} = \frac{1}{2} \frac{1}{(\sin \varphi)^{d-1}} \left[(\sin \varphi)^{d-1} \frac{d^2}{d\varphi^2} + \frac{d}{d\varphi} [(\sin \varphi)^{d-1}] \frac{d}{d\varphi} \right]$$

$$\Lambda^{(d)} = \frac{1}{2} \frac{d^2}{d\varphi^2} + \frac{1}{2} \left\{ \frac{\frac{d}{d\varphi} (\sin \varphi)^{d-1}}{(\sin \varphi)^{d-1}} \right\} \frac{d}{d\varphi}$$

(X_t, Y_t) deux problèmes de Bessel indépendants - En peut chercher l'indice d'oscillation par rapport à cela...



Ou + simplement = $E[e^{\lambda(\theta_t - \theta_0)}] = E[e^{\lambda \int_0^t (X_s dY_s - Y_s dX_s)}$

$$\theta_t - \theta_0 = \int_0^t \frac{X_s dY_s - Y_s dX_s}{(X_s^2 + Y_s^2)}$$

$$dY_t = d\beta_t + \frac{g}{m} Y_t dt$$

$$dX_t = d\alpha_t + \frac{g}{m} X_t dt$$

Je ferai un Bessel $d\rho_t = d\beta_t + \frac{1}{2} g \rho_t dt$

$\rho_0 \neq 0$

Et ce cas, effectivement,

$\int_0^\infty \frac{1}{\rho_s} ds < \infty$, pour que ρ me ramène par là même à l'origine!

Il faut $\rho = 0 = \exp(-\int_0^t \frac{1}{2} ds) \rho_s - \frac{1}{2} \int_0^t ds \rho_s$ Il faut pas une martingale!

Je fais cela en état aveugle, alors :

Je veut un mouvement de Bessel sans ρ

$$\rho_t + \frac{1}{2} \int_0^t \rho_s ds = \rho_0 + \int_0^t \frac{1}{2} ds \rho_s = \rho_0 + \log(\rho_t / \rho_0)$$

Est-ce que ça résout le problème? $(\rho > 0)$