

Contrôle continu de MB61 n° 2

(Documents et calculatrices interdits)

- Le sujet est composé d'un problème noté sur quinze points et d'un questionnaire à choix multiple (QCM) noté sur cinq points à compléter et à rendre avec la copie.
- À propos du problème.
 - Le barème est donné à titre indicatif. L'enseignant se réserve le droit de l'adapter.
 - Une bonne rédaction est un élément d'appréciation important pour les copies.
 - Il est permis d'admettre un résultat et de répondre aux questions suivantes en l'utilisant.
- À propos du QCM.
 - Vous recevez 1 point pour chaque réponse correcte et vous perdez 0.5 point pour chaque réponse incorrecte.
 - Si vous ne répondez pas à une question, vous ne perdez ni ne gagnez aucun point.
 - Vous ne pouvez pas avoir de note négative. Vous aurez donc au moins 0 et au plus 5.

Problème

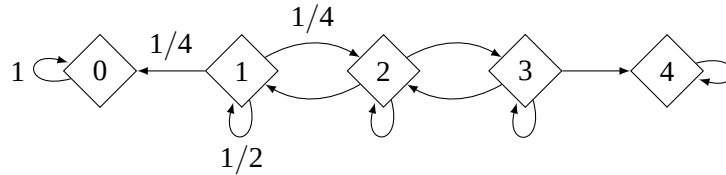
Dans une élection à venir, deux candidats A et B se présentent. On étudie le comportement d'un groupe d'électeurs constitué de quatre individus.

Initialement, au jour appelé « jour 0 », le nombre d'individus préférant le candidat A vaut x_0 (il y a en a donc $4 - x_0$ préférant le candidat B). Ensuite, chaque jour, un des individus pris au hasard parmi les quatre choisit un autre individu au hasard parmi les trois qui restent et le rallie à son opinion si leurs intentions de vote diffèrent, sinon il ne se passe rien.

Pour tout entier naturel n , on note X_n le nombre d'individus du groupe ayant l'intention de voter pour le candidat A le soir du n -ième jour. Ainsi, X_n est une variable aléatoire à valeurs dans $\{0, 1, 2, 3, 4\}$. On remarque que $\mathbb{P}(X_0 = x_0) = 1$.

Soient x et y deux entiers dans $\{0, 1, 2, 3, 4\}$. On note $p(x, y)$ la probabilité pour qu'il y ait exactement y personnes dans le groupe ayant l'intention de voter pour A un jour donné sachant qu'il y en avait x la veille.

1. (1.5pt) Justifier le fait que $p(0,0) = p(4,4) = 1$.
2. (1.5pt) Justifier le fait que si $|x-y| \geq 2$ alors $p(x,y) = 0$.
3. (1.5pt) Montrer que $p(1,0) = p(1,2) = \frac{1}{4}$ et $p(1,1) = \frac{1}{2}$.
4. (1.5pt) Donner (sans justifier) la probabilité $p(x,y)$ pour tout $(x,y) \in \{0,1,2,3,4\}^2$.
On présentera les résultats sur le diagramme suivant à reproduire et à compléter.



On définit la matrice M et pour tout entier naturel n , la matrice colonne U_n par

$$M = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/3 & 0 \\ 1/4 & 1/3 & 1/4 \\ 0 & 1/3 & 1/2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad U_n = \begin{pmatrix} \mathbb{P}(X_n = 1) \\ \mathbb{P}(X_n = 2) \\ \mathbb{P}(X_n = 3) \end{pmatrix}.$$

5. (2pts) Pour tout entier n , établir la relation $U_{n+1} = MU_n$.
6. (2pts) Montrer que $U_n = M^n U_0$ pour tout entier naturel n .

On admet dans la suite que la matrice M admet trois valeurs propres distinctes :

$$\alpha = 0, \quad \beta = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \gamma = \frac{5}{6},$$

et que M s'écrit PDP^{-1} avec P une matrice inversible et D la matrice diagonale dont les termes diagonaux sont α, β, γ .

7. (1pt) Donner M^n en fonction de P et D pour tout entier naturel n .

On suppose dans la suite que $x_0 = 2$.

8. (1.5pt) Déterminer les constantes a, b et c telles que pour tout entier n

$$\mathbb{P}(X_n = 1) = a \cdot \alpha^n + b \cdot \beta^n + c \cdot \gamma^n.$$

9. (1.5pt) En déduire la limite de $(\mathbb{P}(X_n = 1))_n$ quand n tend vers l'infini.

On admet que $(\mathbb{P}(X_n = 2))_n$ et $(\mathbb{P}(X_n = 3))_n$ ont la même limite que $(\mathbb{P}(X_n = 1))_n$.

10. (1pt) Montrer que la limite de $(\mathbb{P}(X_n = 1) + \mathbb{P}(X_n = 4))_n$ quand n tend vers l'infini vaut 1. Interpréter ce résultat.

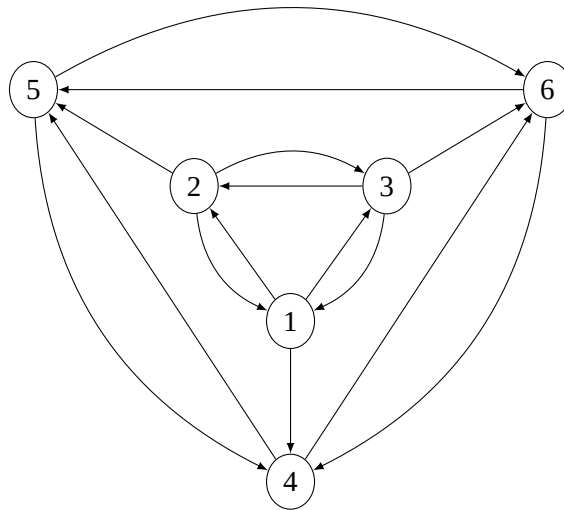
Fin du problème

Questionnaire à choix multiple

(Partie à compléter et à rendre avec la copie)

Nom, Prénom :

On considère la chaîne de Markov correspondant au diagramme suivant. Chaque arc orienté correspond à une probabilité de transition égale à $1/3$.



On a alors :

- L'état 5 est apériodique.
- L'ensemble $\{4, 5, 6\}$ est une classe de communication.
- L'état 2 est récurrent.
- Partant de l'état 5, on est sûr de toucher l'état 6.
- $\mathbb{P}_3(\text{toucher l'état 1}) = \frac{1}{2}$.

Vrai Faux

☐	☐
☐	☐
☐	☐
☐	☐
☐	☐