



L3 GBI, 2nd semestre 2011-2012

Examen de MB61

Lundi 21 mai 2012, de 13h15 à 16h15.

- ▶ Seul le document distribué avec le sujet est autorisé.
 - ▶ Les deux problèmes sont indépendants.
 - ▶ Une bonne rédaction est un élément d'appréciation important pour les copies.
 - ▶ Il est permis d'admettre un résultat et de poursuivre le sujet en l'utilisant.
-

Problème 1

Une urne contient une boule rouge et deux boules blanches. On effectue dans cette urne une succession de tirages d'une boule selon le protocole suivant :

- si la boule tirée est rouge, elle est remise dans l'urne ;
- si la boule tirée est blanche, elle n'est pas remise dans l'urne.

Pour tout entier $n \geq 1$, on note X_n le nombre de boules blanches contenues dans l'urne à l'issue du n -ème tirage et on pose $X_0 = 2$.

Pour tout entier $i \geq 1$, on note B_i (respectivement R_i) l'évènement « on obtient une boule blanche (respectivement rouge) lors du i -ème tirage ».

1. Écrire les évènements $[X_1 = 2]$ et $[X_1 = 1]$ en fonction de B_1 et R_1 et calculer les probabilités $\mathbb{P}(X_1 = 2)$ et $\mathbb{P}(X_1 = 1)$.
2. Quelles sont les valeurs possibles de X_n pour $n \geq 2$?

On admet que (X_n) est une chaîne de Markov.

3. Dessiner le diagramme correspondant à la matrice de transition de (X_n) et justifier les probabilités de transition calculées.

On considère les matrices M et U_n définies par

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 2/3 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad U_n = \begin{pmatrix} \mathbb{P}(X_n = 0) \\ \mathbb{P}(X_n = 1) \\ \mathbb{P}(X_n = 2) \end{pmatrix}.$$

4. Montrer que pour tout entier $n \geq 2$, on a l'égalité

$$U_{n+1} = MU_n.$$

5. Vérifier que l'égalité précédente reste valable pour $n = 0$ et $n = 1$.

6. Montrer par récurrence que $U_n = M^n U_0$ pour tout entier n .

On admet dans la suite que pour tout entier n ,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_n = 0) &= 1 - 4 \left(\frac{1}{2}\right)^n + 3 \left(\frac{1}{3}\right)^n, \\ \mathbb{P}(X_n = 1) &= 4 \left(\frac{1}{2}\right)^n - 4 \left(\frac{1}{3}\right)^n, \\ \mathbb{P}(X_n = 2) &= \left(\frac{1}{3}\right)^n. \end{aligned}$$

7. Calculer $\mathbb{E}(X_n)$, l'espérance de X_n , ainsi que sa limite quand n tend vers $+\infty$.

On note T_1 le numéro du tirage où l'on extrait pour la première fois une boule blanche et T_2 le numéro du tirage où l'on extrait la dernière boule blanche.

8. Donner la loi de T_1 .

9. Écrire les événements $[T_2 = 2]$ et $[T_2 = 3]$ à l'aide de certains des événements B_i et R_i . En déduire les valeurs des probabilités $\mathbb{P}(T_2 = 2)$ et $\mathbb{P}(T_2 = 3)$.

10. Pour tout entier $n \geq 2$, écrire l'événement $[T_2 = n]$ en fonction des événements $[X_{n-1} = 1]$ et $[X_n = 0]$. En déduire la valeur de $\mathbb{P}(T_2 = n)$.

Problème 2

Une grenouille se déplace aléatoirement sur une échelle infinie selon le protocole suivant :

- à l'instant 0, la grenouille est tout en bas de l'échelle, au barreau 0 ;
- si à l'instant n , la grenouille est au barreau x ($0 \leq x \leq n$), alors elle sera à l'instant $n+1$, soit au barreau $x+1$ avec la probabilité $1/3$ (elle a grimpé un barreau), soit au barreau 0 avec la probabilité $2/3$ (elle a glissé et elle est tombée).

Pour tout entier n , on note X_n la variable aléatoire égale au numéro du barreau sur lequel se trouve la grenouille à l'instant n . Ainsi, $X_0 = 0$. On admet que (X_n) est une chaîne de Markov.

1. Représenter le diagramme de transition pour les barreaux allant de 0 à 3.
2. Vérifier que X_1 suit une loi de Bernoulli de paramètre $1/3$. Que vaut $\mathbb{E}(X_1)$?
3. Quelles sont les valeurs possibles de X_2 ? Montrer que

$$\mathbb{P}(X_2 = 0) = \frac{2}{3}, \quad \mathbb{P}(X_2 = 1) = \frac{2}{9} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(X_2 = 2) = \frac{1}{9}.$$

4. Calculer $\mathbb{E}(X_2)$.
5. Déterminer l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire X_n .
6. Soient $n \geq 1$ et $1 \leq x \leq n$. Établir l'égalité

$$\mathbb{P}(X_n = x) = \frac{1}{3} \mathbb{P}(X_{n-1} = x - 1).$$

7. Dédire de la question 6. et du fait que

$$\mathbb{P}(X_n = 0) = 1 - \sum_{x=1}^n \mathbb{P}(X_n = x),$$

que l'on a

$$\mathbb{P}(X_n = 0) = \frac{2}{3}.$$

8. En utilisant la question 6., montrer à l'aide d'un raisonnement par récurrence sur x que pour tout entier $n \geq 1$ et tout entier $0 \leq x \leq n$, on a

$$\mathbb{P}(X_n = x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x \mathbb{P}(X_{n-x} = 0).$$

9. Dédire de 8. la valeur de $\mathbb{P}(X_n = n)$ pour tout entier naturel n .
10. Donner pour tout entier $n \geq 1$, la loi de la variable aléatoire X_n .

Fin du sujet