

Corrigé de l'examen de MB61

Lundi 21 mai 2012, de 13h15 à 16h15.

Problème 1

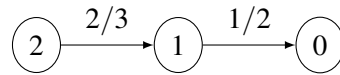
Une urne contient une boule rouge et deux boules blanches. On effectue dans cette urne une succession de tirages d'une boule selon le protocole suivant :

- si la boule tirée est rouge, elle est remise dans l'urne ;
- si la boule tirée est blanche, elle n'est pas remise dans l'urne.

Pour tout entier $n \geq 1$, on note X_n le nombre de boules blanches contenues dans l'urne à l'issue du n -ème tirage et on pose $X_0 = 2$.

Pour tout entier $i \geq 1$, on note B_i (respectivement R_i) l'évènement « on obtient une boule blanche (respectivement rouge) lors du i -ème tirage ».

1. On a $[X_1 = 2] = R_1$ et $[X_1 = 1] = B_1$. Ainsi, $\mathbb{P}(X_1 = 2) = \mathbb{P}(R_1) = \frac{1}{3}$ et $\mathbb{P}(X_1 = 1) = \mathbb{P}(B_1) = \frac{2}{3}$.
2. Les valeurs possibles de X_n pour $n \geq 2$ sont 0, 1 et 2.
3. Le diagramme correspondant à la matrice de transition de (X_n) est le suivant.



Le nombre de boules blanches dans l'urne ne peut pas augmenter, on a donc

$$p(0, 1) = p(1, 2) = 0.$$

De plus, on ne peut piocher qu'une seule boule blanche à la fois donc le nombre de boules blanches dans l'urne ne peut pas passer de 2 à 0, d'où $p(2, 0) = 0$.

Il reste donc à calculer les probabilités de transition $p(2, 1) = 1 - p(2, 2)$ et $p(1, 0) = 1 - p(1, 1)$ qui sont respectivement données par $\frac{2}{3}$ et $\frac{1}{2}$.

4. Soit un entier $n \geq 2$. On peut écrire pour tout $x \in \{0, 1, 2\}$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_{n+1} = x) &= \mathbb{P}(X_{n+1} = x, X_n = 0) + \mathbb{P}(X_{n+1} = x, X_n = 1) + \mathbb{P}(X_{n+1} = x, X_n = 2) \\ &= \mathbb{P}(X_{n+1} = x | X_n = 0) \mathbb{P}(X_n = 0) + \mathbb{P}(X_{n+1} = x | X_n = 1) \mathbb{P}(X_n = 1) \\ &\quad + \mathbb{P}(X_{n+1} = x | X_n = 2) \mathbb{P}(X_n = 2) \\ &= p(0, x) \mathbb{P}(X_n = 0) + p(1, x) \mathbb{P}(X_n = 1) + p(2, x) \mathbb{P}(X_n = 2),\end{aligned}$$

où le conditionnement est possible car $\mathbb{P}(X_n = x) > 0$ quand $n \geq 2$. Quand $x = 0$, l'égalité précédente s'écrit

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = 0) = 1 \cdot \mathbb{P}(X_n = 0) + \frac{1}{2} \cdot \mathbb{P}(X_n = 1) + 0 \cdot \mathbb{P}(X_n = 2),$$

ce qui correspond au produit de la première ligne de la matrice M avec le vecteur U_n . Quand $x = 1$, on trouve cette fois

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = 1) = 0 \cdot \mathbb{P}(X_n = 0) + \frac{1}{2} \cdot \mathbb{P}(X_n = 1) + \frac{2}{3} \cdot \mathbb{P}(X_n = 2),$$

ce qui correspond au produit de la deuxième ligne de la matrice M avec le vecteur U_n . Enfin, quand $x = 2$, on trouve cette fois

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = 2) = 0 \cdot \mathbb{P}(X_n = 0) + 0 \cdot \mathbb{P}(X_n = 1) + \frac{1}{3} \cdot \mathbb{P}(X_n = 2),$$

ce qui correspond au produit de la troisième ligne de la matrice M avec le vecteur U_n . Finalement, on a bien

$$U_{n+1} = MU_n.$$

5. D'après la question 1. on a

$$U_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad U_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix} = MU_0,$$

puis en remarquant que

$$\mathbb{P}(X_2 = 2) = \mathbb{P}(X_2 = 2, X_1 = 2, X_0 = 2) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = 0 \cdot 0 + 0 \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3},$$

$$\mathbb{P}(X_2 = 0) = \mathbb{P}(X_2 = 0, X_1 = 1, X_0 = 2) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = 1 \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} + 0 \cdot \frac{1}{3}$$

$$\mathbb{P}(X_2 = 1) = 1 - \frac{1}{9} - \frac{1}{3} = \frac{5}{9} = 0 \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3},$$

on obtient bien que $U_2 = MU_1$.

6. Classique.

7. On a

$$\mathbb{E}(X_n) = \mathbb{P}(X_n = 1) + 2\mathbb{P}(X_n = 2) = 4 \left(\frac{1}{2}\right)^n - 2 \left(\frac{1}{3}\right)^n,$$

et on en déduit que $\mathbb{E}(X_n) \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$.

8. On a $[T_1 = 1] = B_1$ et $[T_1 = k] = R_1 \cap \dots \cap R_{k-1} \cap B_k$, pour $k \geq 2$, d'où

$$\mathbb{P}(T_1 = 1) = \mathbb{P}(B_1) = \frac{2}{3}, \quad \mathbb{P}(T_1 = k) = \mathbb{P}(R_1 \cap \dots \cap R_{k-1} \cap B_k) = \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{k-1},$$

ainsi on voit que T_1 suit une loi géométrique de probabilité de succès $\frac{2}{3}$.

9. On a $[T_2 = 2] = B_1 \cap B_2$ et $[T_2 = 3] = (B_1 \cap R_2 \cap B_3) \cup (R_1 \cap B_2 \cap B_3)$. On a donc $\mathbb{P}(T_2 = 2) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$ et

$$\mathbb{P}(T_2 = 3) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{18}.$$

10. Pour tout entier $n \geq 2$, on a $[T_2 = n] = [X_{n-1} = 1, X_n = 0]$. d'où

$$\mathbb{P}(T_2 = n) = \mathbb{P}(X_n = 0, X_{n-1} = 1) = p(1, 0) \cdot \mathbb{P}(X_{n-1} = 1) = 2 \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - 2 \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}.$$

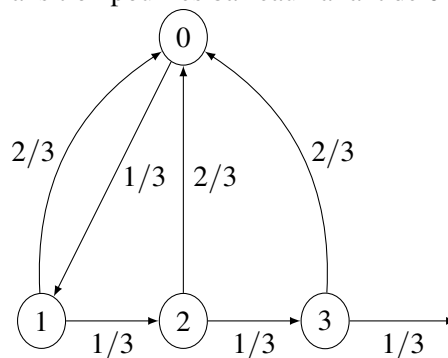
Problème 2

Une grenouille se déplace aléatoirement sur une échelle infinie selon le protocole suivant :

- à l'instant 0, la grenouille est tout en bas de l'échelle, au barreau 0 ;
- si à l'instant n , la grenouille est au barreau x ($0 \leq x \leq n$), alors elle sera à l'instant $n+1$, soit au barreau $x+1$ avec la probabilité $1/3$, soit elle retombera au barreau 0 avec la probabilité $2/3$.

Pour tout entier n , on note X_n la variable aléatoire égale au numéro du barreau sur lequel se trouve la grenouille à l'instant n . Ainsi, $X_0 = 0$. On admet que (X_n) est une chaîne de Markov.

1. Le diagramme de transition pour les barreaux allant de 0 à 3 est le suivant.



2. Puisqu'à l'instant 0, la grenouille est au barreau 0, à l'instant 1, elle est au barreau 1 avec probabilité $1/3$ ou au barreau 0 avec probabilité $2/3$. La variable aléatoire X_1 suit bien une loi de Bernoulli de paramètre $1/3$ et $\mathbb{E}(X_1) = 1/3$.
3. À l'instant 1, la grenouille est soit au barreau 1 et dans ce cas, à l'instant 2, la grenouille peut se trouver en 0 si elle retombe ou bien en 2 si elle grimpe d'un barreau, soit elle se trouve au barreau 0 à l'instant 1 et à l'instant 2, elle peut se trouver au barreau 0 ou au barreau 1. Ainsi les valeurs possibles de X_2 sont 0, 1 ou 2. Avec les déroulements que l'on a décrits, on peut voir que

$$\mathbb{P}(X_2 = 2) = \mathbb{P}(X_0 = 0, X_1 = 1, X_2 = 2) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9},$$

$$\mathbb{P}(X_2 = 1) = \mathbb{P}(X_0 = 0, X_1 = 0, X_2 = 1) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{9},$$

et

$$\mathbb{P}(X_2 = 0) = \mathbb{P}(X_0 = 0, X_1 = 0, X_2 = 0) + \mathbb{P}(X_0 = 0, X_1 = 1, X_2 = 0) = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3}.$$

4. On a

$$\mathbb{E}(X_2) = \mathbb{P}(X_2 = 1) + 2\mathbb{P}(X_2 = 2) = \frac{2}{9} + \frac{2}{9} = \frac{4}{9}.$$

5. L'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire X_n est inclus dans $\{0, 1, \dots, n\}$.

EN effet, à l'instant n , la grenouille ne peut pas avoir grimpé plus de n barreaux.

Il reste à montrer que chaque valeur $k \in \{0, \dots, n\}$ peut être prise par X_n . Il suffit de considérer le déroulement suivant : la grenouille retombe à 0 les $n - k$ premiers instants puis elle grimpe un barreau tous les instants suivants. Ainsi, au n -ième instant, la grenouille est au barreau k .

6. Soient $n \geq 1$ et $1 \leq x \leq n$. L'évènement $[X_n = x]$ n'est compatible qu'avec l'évènement $[X_{n-1} = x - 1]$ car pour les autres valeurs de X_{n-1} il n'y a pas de transition possible vers x . On a donc

$$\mathbb{P}(X_n = x) = \mathbb{P}(X_n = x, X_{n-1} = x - 1) = \frac{1}{3} \mathbb{P}(X_{n-1} = x - 1).$$

7. D'après la question 6., il vient

$$\mathbb{P}(X_n = 0) = 1 - \sum_{x=1}^n \mathbb{P}(X_n = x) = 1 - \frac{1}{3} \sum_{x=1}^n \mathbb{P}(X_{n-1} = x - 1) = 1 - \frac{1}{3} \sum_{x=0}^{n-1} \mathbb{P}(X_{n-1} = x).$$

Comme l'ensemble des valeurs possibles pour X_{n-1} est $\{0, \dots, n - 1\}$, on en déduit que $\sum_{x=0}^{n-1} \mathbb{P}(X_{n-1} = x) = 1$ et que $\mathbb{P}(X_n = 0) = \frac{2}{3}$.

8. En utilisant la question 6., on voit que

$$\mathbb{P}(X_n = x) = \frac{1}{3} \mathbb{P}(X_{n-1} = x - 1) = \left(\frac{1}{3}\right)^2 \mathbb{P}(X_{n-2} = x - 2) = \dots = \left(\frac{1}{3}\right)^x \mathbb{P}(X_{n-x} = 0).$$

9. En utilisant la question 8. avec $x = n$, on a directement

$$\mathbb{P}(X_n = n) = \left(\frac{1}{3}\right)^n \mathbb{P}(X_0 = 0) = \left(\frac{1}{3}\right)^n.$$

10. Comme pour tout $x \in \{0, \dots, n - 1\}$, on a $\mathbb{P}(X_{n-x} = 0) = 2/3$ d'après la question 7., il vient d'après la question 8.

$$\mathbb{P}(X_n = x) = \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(X_n = n) = \left(\frac{1}{3}\right)^n.$$