

INTRODUCTION AUX SYSTÈMES DE PARTICULES EN INTERACTION

Mini cours donné à Evry – Décembre 2011

MIKAEL FALCONNET
mikael.falconnet@genopole.cnrs.fr

1 De l'individu isolé à une infinité en interaction

1.1 Individu isolé

Considérons un individu isolé dont on observe l'état de santé chaque jour. On suppose qu'il est soit "sain" soit "malade" et ce de manière imprévisible. Pour plus de commodité, ces deux états sont respectivement représentés par les valeurs 0 et 1.

La première modélisation aléatoire d'un tel phénomène est une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ indépendantes et équidistribuées tels que

$$\mathbb{P}(X_n = 1) = 1 - \mathbb{P}(X_n = 0) = p \in [0, 1].$$

On peut alors dérouler les théorèmes classiques de la théorie des probabilités pour comprendre le comportement asymptotique de l'individu. Pour affiner la modélisation, on peut rendre le paramètre p dépendant du temps pour par exemple prendre en compte que la probabilité d'être malade pour un individu varie avec le temps (quand on est un nourrisson, quand on vieillit, quand on sort le samedi soir, etc.), ainsi

$$\mathbb{P}(X_n = 1) = 1 - \mathbb{P}(X_n = 0) = p_n \in [0, 1].$$

Là encore, avec assez d'informations sur les p_n , on est capable d'étudier le comportement asymptotique de l'individu.

On peut à présent supprimer l'hypothèse d'indépendance. Une des manières de le faire est de supposer que la possibilité d'être malade dépend de l'état dans lequel on était la veille. On passe alors dans le champ des chaînes de Markov à temps discret caractérisées par une loi initiale μ et une matrice de transition

$$P = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1-p & p \\ q & 1-q \end{pmatrix} \end{matrix}.$$

Là encore, on dispose d'une caisse à outils bien rodée nous permettant de comprendre l'asymptotique du processus.

Des chaînes de Markov à temps discret, on peut passer aux chaînes de Markov à temps continu caractérisées par une loi initiale μ et un générateur infinitésimal Q qu'on appelle aussi Q -matrice

$$Q = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix} & \begin{pmatrix} -c(0) & q(0,1) \\ q(1,0) & -c(1) \end{pmatrix} \end{matrix}.$$

Selon cette modélisation, l'individu reste dans l'état x suivant une loi exponentielle de paramètre $c(x)$, puis passe à l'état $1-x$. La machinerie est plus délicate, mais là encore il n'y a pas de souci pour comprendre l'asymptotique du processus.

1.2 Individus en nombre fini

Sans interaction. À présent, on peut regarder non plus un individu isolé mais une population de n individus. Si ces individus vivent dans des endroits complètement isolés les uns des autres, le modèle aléatoire auquel on va recourir consiste en n chaînes de Markov à temps continu et indépendantes. Pour comprendre comment fonctionne le processus, il suffit d'utiliser l'image des horloges. Au dessus de chaque individu, on place une horloge exponentielle dont le paramètre dépend de l'état dans lequel se trouve l'individu, à savoir malade ou sain. Parmi les n horloges, une et une seule va sonner en premier. L'individu correspondant va alors changer d'état, toutes les horloges sont réinitialisées et on relance le processus.

Grâce à nos connaissances sur les processus de Poisson, un tel modèle est parfaitement défini et s'étudie assez simplement. Ceci n'est pourtant pas un modèle jouet, il faut savoir que c'est ainsi que la plupart des modèles d'évolution de séquences d'ADN étaient construits avant l'introduction des modèles avec dépendance du contexte.

Avec interaction. Maintenant revenons au problème qui nous préoccupe. On considère n individus qui ont la possibilité d'interagir entre eux. Dans le cadre d'une infection, ceci est tout à fait légitime. Il nous faut donc un cadre pour définir les interactions possibles entre individus, à savoir ici un graphe dont les sommets sont les individus et où l'on place une arête entre deux d'entre eux si ils peuvent interagir entre eux. Souvent, ce sera un sous-graphe fini de la grille $\mathbb{Z}^d$, mais cela peut être un arbre, un graphe cyclique ou un graphe complet, tout dépend de la géométrie que l'on veut prendre en compte.

Une configuration $\eta = (\eta(x))_{x \in S}$ représente l'ensemble des valeurs des n individus concernés, et $\eta(x)$ représente l'état de l'individu x . La configuration η^x est définie à partir de la configuration η en remplaçant l'état $\eta(x)$ de l'individu x par $1 - \eta(x)$. C'est ce qu'on appelle un *flip*. Il nous reste donc à définir le taux de flip d'un individu x dans la configuration η , noté $c(x, \eta)$.

- Les individus malades guérissent après un temps exponentiel de paramètre 1,

$$c(x, \eta) = 1, \quad \text{si } \eta(x) = 1.$$

- Les individus sains sont contaminés avec un taux proportionnel au nombre de leurs voisins malades,

$$c(x, \eta) = \lambda \sum_{y \sim x} \eta(y), \quad \text{si } \eta(x) = 0.$$

Là encore, pour comprendre le processus, il suffit de placer une horloge exponentielle au dessus de chaque individu sauf qu'à présent son paramètre ne dépend plus seulement de l'individu, mais également de ses voisins. Toutefois, même avec ce raffinement, on reste dans le champ des chaînes de Markov à temps continu. En effet, le générateur infinitésimal Q est donné par

$$q(\eta, \eta^x) = c(x, \eta).$$

On constate que la configuration $\eta \equiv 0$ est absorbante, comme la chaîne est à espace d'états finis et irréductible, on en conclut que pour toute mesure initiale, la chaîne converge presque sûrement vers δ_0 et l'infection meurt presque sûrement.

1.3 Infinité d'individus

On a vu comment construire un processus d'infection sur un nombre fini d'individus. On peut à présent se demander comment faire avec une infinité d'individus en conservant une dynamique locale décrite comme ci-dessus. Il est en effet toujours possible de placer une horloge exponentielle au-dessus de chaque individu, mais le temps de première sonnerie d'une horloge n'est plus défini puisque que l'on se retrouve avec une infinité d'horloges dont les taux ne sont pas sommable.

Il va donc falloir recourir à un nouveau cadre mathématique qui sera ici l'ensemble des processus de Feller. Dans la suite, nous ferons tout d'abord un rappel sur les chaînes de Markov à temps continu, puis nous expliquerons rapidement la construction des processus de Feller et enfin, nous verrons comment construire un système avec une infinité de particules en interaction.

2 Chaînes de Markov à temps continu

Dans cette section, on va définir trois objets servant à décrire les chaînes de Markov à temps continu et établir des correspondances entre eux avec pour perspective d'éclairer la construction des processus de Feller.

Dans cette section S est un espace d'états fini ou dénombrable, muni de la topologie discrète.

2.1 Définitions

Soit Ω l'ensemble des fonctions continues à droite $\omega : [0, \infty) \rightarrow S$ possédant un nombre fini de sauts dans tout intervalle borné. On note $X(t, \omega) = \omega(t)$ et $(\theta_s \omega)(t) = \omega(t + s)$. On munit Ω de la tribu $\mathcal{F}$ définie comme la plus petite tribu rendant les applications $\omega \mapsto \omega(t)$ mesurable pour tout $t \geq 0$.

Définition 2.1. Une chaîne de Markov sur S est définie par

- (a) une famille de probabilités $\{\mathbb{P}^x, x \in S\}$ sur Ω ,
- (b) une filtration continue à droite $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ sur $(\Omega, \mathcal{F})$ pour laquelle le processus $X(t)$ est adapté et qui vérifie

$$\mathbb{P}^x(X(0) = x) = 1,$$

et

$$(2.1) \quad \mathbb{E}^x(Y \circ \theta_s | \mathcal{F}_s) = \mathbb{E}^{X(s)}(Y), \quad \mathbb{P}^x - p.s.,$$

pour tout $x \in S$ et tout Y mesurable bornée.

La propriété (2.1) n'est rien de plus que la propriété de Markov.

Définition 2.2. Une fonction de transition est une fonction $p_t(x, y)$ définie pour tout $t \geq 0$ et pour tous $x, y \in S$ vérifiant

$$(2.2) \quad p_t(x, y) \geq 0, \quad \sum_y p_t(x, y) = 1, \quad \lim_{t \searrow 0} p_t(x, x) = p_0(x, x) = 1,$$

et les équations de Chapman-Kolmogorov

$$(2.3) \quad p_{s+t}(x, y) = \sum_z p_s(x, z) p_t(z, y).$$

On peut voir qu'à t fixé, $(p_t(x, y))_{x, y \in S}$ est une matrice stochastique.

À partir de la fonction de transition, on peut définir les lois fini-dimensionnelles de la chaîne partant de x

$$\mathbb{P}^x(X(t_1) = x_1, \dots, X(t_n) = x_n) = p_{t_1}(x, x_1) p_{t_2 - t_1}(x_1, x_2) \dots p_{t_n - t_{n-1}}(x_{n-1}, x_n).$$

Une chaîne de Markov peut aussi être décrite de manière infinitésimale grâce à sa Q -matrice. Formellement, le lien entre la fonction de transition est donné par

$$(2.4) \quad q(x, y) = \left. \frac{d}{dt} p_t(x, y) \right|_{t=0}.$$

Définition 2.3. Une Q -matrice est une matrice indexée par $S \times S$ vérifiant

$$q(x, y) \geq 0 \text{ pour } x \neq y \quad \text{et} \quad \sum_y q(x, y) = 0.$$

Les termes diagonaux jouant un rôle particulier, on leur attribue une notation particulière

$$c(x) = -q(x, x) \in [0, \infty].$$

Remarque 2.4. *Quand l'espace d'états S est fini, tous ces objets correspondent, mais ce n'est plus le cas en général quand S est dénombrable comme nous le verrons par la suite.*

Une Q -matrice est - à mon humble avis, mais je le partage - la manière la plus élégante et intuitive de décrire une chaîne de Markov à temps continu quand elle est raisonnable, c'est à dire quand $c(x) < \infty$ pour tout $x \in S$. En effet, à partir d'une Q -matrice, on peut définir une matrice de saut Π de la manière suivante

$$\pi(x, y) = \begin{cases} q(x, y)/c(x) & \text{si } x \neq y \text{ et } c(x) \neq 0, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

$$\pi(x, x) = \begin{cases} 0 & \text{si } c(x) \neq 0, \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Le processus fonctionne alors ainsi : partant de l'état x , on attend un temps suivant une loi exponentielle de paramètre $c(x)$, puis lorsque ce temps est écoulé le processus passe à l'état y avec probabilité $\pi(x, y)$.

Exemple 2.5. *Dès que l'on possède une description infinitésimale de la chaîne pour un espace d'états fini, on définit la fonction de transition comme une exponentielle de matrice*

$$P_t = e^{tQ} = \sum_n \frac{t^n Q^n}{n!}.$$

On voit dans l'exemple ci-dessus que l'on peut toujours passer d'une Q -matrice sur S fini à une fonction de transition. Il est alors légitime de se demander si l'on peut toujours considérer une matrice de transition comme une exponentielle de matrice. Ceci est bien sûr faux en général comme le prouve les deux exemples suivants

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Cela a pour conséquence qu'il n'est pas toujours possible de plonger une chaîne de Markov à temps discret dans une chaîne de Markov à temps continu.

2.2 De la chaîne de Markov à la description infinitésimale

Nous allons tout d'abord expliquer comment passer d'une chaîne de Markov à la fonction de transition.

Théorème 2.6. *Étant donnée une chaîne de Markov, posons*

$$p_t(x, y) = \mathbb{P}^x(X(t) = y).$$

Alors

- (a) $p_t(x, y)$ est une fonction de transition ;
- (b) $p_t(x, y)$ caractérise les mesures $\mathbb{P}^x$ de manière unique.

Démonstration. Les deux premières conditions de (2.2) sont immédiates. Le fait que $\lim_{t \searrow 0} p_t(x, x) = p_0(x, x) = 1$ découle de la continuité à droite des trajectoires en remarquant que

$$p_t(x, x) \geq \mathbb{P}^x(\tau > t), \quad \tau = \inf\{t > 0 : X(t) \neq X(0)\}.$$

Les équations de Chapman-Kolmogorov proviennent de la propriété de Markov en prenant $Y = \mathbf{1}\{X(t) = y\}$. En effet,

$$\mathbb{P}^x(X(s+t) = y | \mathcal{F}_s) = \mathbb{E}^x(Y \circ \theta_s | \mathcal{F}_s) = \mathbb{E}^{X(s)}(Y) = \mathbb{P}^{X(s)}(X(t) = y) = p_t(X(s), y).$$

En prenant l'espérance par rapport à $\mathbb{P}^x$ de part et d'autre, il vient

$$p_{t+s}(x, y) = \sum_z \mathbb{P}^x(X(s) = z) p_t(z, y) = \sum_z p_s(x, z) p_t(z, y).$$

Le fait que la fonction de transition ainsi définie caractérise les mesures $\mathbb{P}^x$ provient du fait que $p_t(x, y)$ caractérise les lois fini-dimensionnelles de $\mathbb{P}^x$ grâce à la formule

$$\mathbb{P}^x(X(t_1) = x_1, \dots, X(t_n) = x_n) = p_{t_1}(x, x_1) p_{t_2-t_1}(x_1, x_2) \dots p_{t_n-t_{n-1}}(x_{n-1}, x_n),$$

obtenue en itérant la propriété de Markov. Un peu de théorie de la mesure permet de conclure. $\square$

Maintenant, nous allons voir comment passer de la fonction de transition au générateur infinitésimal. Pour cela, nous avons besoin de quelques propriétés satisfaites par toute fonction de transition

Théorème 2.7. *Soit $p_t(x, y)$ une fonction de transition. Alors*

- (a) $p_t(x, x) > 0$ pour tout $t \geq 0$ et tout $x \in S$.
- (b) Si il existe $t_0 > 0$ tel que $p_{t_0}(x, x) = 1$, alors $p_t(x, x) = 1$ pour tout $t \geq 0$.
- (c) Pour tous $x, y \in S$, $p_t(x, y)$ est uniformément continue en t . En fait, on a

$$(2.5) \quad |p_t(x, y) - p_s(x, y)| \leq 1 - p_{|t-s|}(x, x).$$

Démonstration. Pour prouver (a), on utilise le fait qu'il existe t_0 petit tel que $p_t(x, x) \geq 1/2$ pour tout $0 \leq t \leq t_0$. En utilisant les équations de Chapman-Kolmogorov, il vient

$$(2.6) \quad p_{t+s}(x, x) \geq p_t(x, x) p_s(x, x), \quad \forall t, s \geq 0.$$

Ainsi,

$$p_t(x, x) \geq p_r(x, x) p_{t_0}(x, x)^q, \quad \text{avec } q = \left\lceil \frac{t}{t_0} \right\rceil \text{ et } r = t - q t_0.$$

donc la positivité s'étend à tout $t > s$.

Pour prouver (b), on remarque que

$$p_{t_0}(x, x) \leq p_{t_0-t}(x, x) p_t(x, x) + [1 - p_t(x, x)] = 1 - p_t(x, x) [1 - p_{t_0-t}(x, x)].$$

Ainsi $p_{t_0}(x, x) = 1$ entraîne $p_{t_0-t}(x, x) = 1$ pour tout $0 \leq t \leq t_0$ puisque $p_t(x, x) > 0$.
On étend le résultat comme précédemment.

Pour prouver (c), on écrit

$$p_{t+s}(x, y) - p_t(x, y) = p_t(x, y) [p_s(x, x) - 1] + \sum_{z \neq x} p_s(x, z) p_t(z, y).$$

Comme

$$0 \leq \sum_{z \neq x} p_s(x, z) p_t(z, y) \leq 1 - p_s(x, x),$$

et

$$p_s(x, x) - 1 \leq p_t(x, y) [p_s(x, x) - 1] \leq 0,$$

on en déduit que $|p_{t+s}(x, y) - p_t(x, y)| \leq 1 - p_s(x, x)$. □

On a évoqué au dessus une relation formelle entre $p_t(x, y)$ et $q(x, y)$ par le biais de la dérivée. Nous allons à présent justifier ce lien.

Théorème 2.8. Soit $p_t(x, y)$ une fonction de transition. Alors

(a) pour tout $x \in S$, la dérivée à droite

$$(2.7) \quad c(x) = -q(x, x) = \left. \frac{d}{dt} p_t(x, x) \right|_{t=0} \in [0, \infty]$$

est définie, et vérifie

$$(2.8) \quad p_t(x, x) \geq e^{-c(x)t}.$$

(b) Si $c(x) < \infty$, alors pour tout x et $y \neq x$ la dérivée à droite

$$(2.9) \quad q(x, y) = \left. \frac{d}{dt} p_t(x, y) \right|_{t=0} \in [0, \infty)$$

est définie, et alors

$$(2.10) \quad \sum_y q(x, y) \leq 0.$$

(c) Si il existe $x \in S$ tel que $c(x) < \infty$ et $\sum_y q(x, y) = 0$, alors $p_t(x, y)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ en t pour tous x, y , et vérifie

$$(2.11) \quad \frac{d}{dt} p_t(x, y) = \sum_z q(x, z) p_t(z, y).$$

L'équation (2.11) peut se réécrire

$$P'(t) = QP(t).$$

Démonstration. On pose $f(t) = -\log p_t(x, x)$. Cette fonction est bien définie, continue et sous-additive par (2.6). Ainsi,

$$c(x) = \lim_{t \searrow 0} \frac{f(t)}{t} = \sup_{t > 0} \frac{f(t)}{t} \in [0, \infty]$$

existe et vérifie

$$f(t) \leq c(x)t, \quad \forall t \geq 0$$

ce qui achève de prouver (a).

Pour la partie (b), on remarque que pour $y \neq x$

$$p_t(x, y) \leq 1 - p_t(x, x) \leq 1 - e^{-c(x)t} \leq c(x)t,$$

ce qui entraîne

$$\limsup_{t \searrow 0} \frac{p_t(x, y)}{t} \leq c(x).$$

Notons $q(x, y)$ cette limite supérieure. Il reste à montrer que la limite existe. Prenons $\delta > 0$. La matrice $(p_\delta(x, y))$ peut être vue comme la matrice de transition d'une chaîne de Markov à temps discret. En particulier, $p_{n\delta}(x, y)$ est le coefficient de la puissance n -ième de p_δ . On a alors

$$p_{n\delta}(x, y) \geq \sum_{k=0}^n p_\delta^k(x, x) p_\delta(x, y) p_{(n-k-1)\delta}(y, y).$$

Comme

$$p_\delta^k(x, x) \geq e^{-c(x)k\delta} \geq e^{-c(x)n\delta},$$

il vient

$$\frac{p_{n\delta}(x, y)}{n\delta} \geq \frac{p_\delta(x, y)}{\delta} e^{-c(x)n\delta} \inf_{0 \leq s \leq n\delta} p_s(y, y).$$

Prenons $(\delta_k)_k$ telle que $\delta_k \searrow 0$ et $\frac{p_{\delta_k}(x, y)}{\delta_k} \rightarrow q(x, y)$, et $(n_k^t)_k$ telle que $n_k^t \delta_k \rightarrow t$. On a alors

$$\frac{p_t(x, y)}{t} \geq q(x, y) e^{-c(x)t} \inf_{0 \leq s \leq t} p_s(y, y).$$

D'où

$$\liminf_{t \searrow 0} \frac{p_t(x, y)}{t} \geq q(x, y).$$

□

2.3 L'exemple de Blackwell

On va construire une fonction de transition pour laquelle tous les états sont instantanés, c'est à dire $c(x) = \infty$ pour tout $x \in S$.

Soit (X_n) une suite de chaînes de Markov à temps continu sur $\{0, 1\}$ indépendantes, dont le générateur infinitésimal est donné par

$$\begin{pmatrix} -\beta_n & \beta_n \\ \delta_n & -\delta_n \end{pmatrix}.$$

On suppose que $X_n(0) = 0$ pour tout entier n et on définit

$$X(t) = (X_1(t), X_2(t), \dots) \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \quad \text{et} \quad S = \left\{ x \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}} : \sum_i x_i < \infty \right\}.$$

Le processus $X(t)$ est bien défini grâce au théorème d'extension de Kolmogorov et l'espace S est dénombrable. Il reste à voir si $X(t)$ reste dans S , c'est à dire que pour tout temps $t > 0$,

$$(2.12) \quad \mathbb{P}(X_n(t) = 1 \text{ pour une infinité de } n) = 0.$$

Comme

$$\mathbb{P}^0(X_n(t) = 1) = \frac{\beta_n}{\beta_n + \delta_n} \left[1 - e^{-(\beta_n + \delta_n)t} \right] \leq \frac{\beta_n}{\beta_n + \delta_n},$$

l'égalité (2.12) est vérifiée dès que

$$\sum_n \frac{\beta_n}{\beta_n + \delta_n} < \infty,$$

grâce au lemme de Borel-Cantelli. Pour $x, y \in S$, on pose

$$p_t(x, y) = \mathbb{P}(X(t) = y | X(0) = x) = \prod_n \mathbb{P}^{x_n}(X_n(t) = y_n),$$

et on vérifie que ceci définit bien une fonction de transition. Les deux premières conditions de (2.2) sont immédiates, il reste donc à montrer que

$$\lim_{t \searrow 0} p_t(x, x) = 1.$$

Soit x un élément de S , il existe N tel que pour tout $n \geq N$, $x_n = 0$. Ainsi,

$$\begin{aligned} p_t(x, x) &= \prod_{n=1}^{N-1} \mathbb{P}^{x_n}(X_n(t) = x_n) \times \prod_{n \geq N} \left(\frac{\delta_n}{\beta_n + \delta_n} + \frac{\beta_n}{\beta_n + \delta_n} e^{-(\beta_n + \delta_n)t} \right), \\ &\geq \prod_{n=1}^{N-1} \mathbb{P}^{x_n}(X_n(t) = x_n) \times \prod_{n \geq N} \frac{\delta_n}{\beta_n + \delta_n}. \end{aligned}$$

Or

$$\log \left(\prod_{n \geq N} \frac{\delta_n}{\beta_n + \delta_n} \right) = \sum_n \log \left(1 - \frac{\beta_n}{\beta_n + \delta_n} \right) > -\infty,$$

on peut donc passer à la limite en t ci dessus, et on obtient

$$\liminf_{t \rightarrow 0} p_t(x, x) \geq \prod_{n \geq N} \frac{\delta_n}{\beta_n + \delta_n},$$

puis en faisant tendre N vers l'infini

$$\liminf_{t \rightarrow 0} p_t(x, x) \geq 1.$$

Il reste à vérifier les équations de Chapman-Kolmogorov. Définissons S_n comme

$$S_n = \{x \in S : x_k = 0, \forall k \geq n\}.$$

Soient $x, y \in S_N$ et $M \geq N$. Il vient

$$\sum_{z \in S_M} p_t(x, z) p_s(z, y) = h_M(t) h_M(s) \sum_{z_{1:M} \in \{0,1\}^M} \prod_{n=1}^M \mathbb{P}^{x_n}(X_n(t) = z_n) \mathbb{P}^{z_n}(X_n(s) = y_n),$$

avec

$$h_M(t) = \prod_{n \geq M} \mathbb{P}^0(X_n(t) = 0) \xrightarrow{M \rightarrow \infty} 1.$$

Or

$$\begin{aligned} \sum_{z_{1:M} \in \{0,1\}^M} \prod_{n=1}^M \mathbb{P}^{x_n}(X_n(t) = z_n) \mathbb{P}^{z_n}(X_n(s) = y_n) &= \prod_{n=1}^M \sum_{\varepsilon=0}^1 \mathbb{P}^{x_n}(X_n(t) = \varepsilon) \mathbb{P}^{\varepsilon}(X_n(s) = y_n) \\ &= \prod_{n=1}^M \mathbb{P}^{x_n}(X_n(t+s) = y_n) \\ &\xrightarrow{M \rightarrow \infty} p_{t+s}(x, y) \end{aligned}$$

À présent, nous allons voir que si la série $\sum \beta_n$ est divergente, alors tous les états sont instantanés. En effet, si $x \in S_N$ et $M \geq N$

$$1 - p_t(x, x) \geq 1 - \prod_{n=N}^M \mathbb{P}^0(X_n(t) = 0) = 1 - \prod_{n=N}^M \left[\frac{\delta_n}{\beta_n + \delta_n} + \frac{\beta_n}{\beta_n + \delta_n} e^{-(\beta_n + \delta_n)t} \right]$$

On a

$$\frac{\delta_n}{\beta_n + \delta_n} + \frac{\beta_n}{\beta_n + \delta_n} e^{-(\beta_n + \delta_n)t} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} (1 - \beta_n t),$$

donc,

$$\prod_{n=N}^M \left[\frac{\delta_n}{\beta_n + \delta_n} + \frac{\beta_n}{\beta_n + \delta_n} e^{-(\beta_n + \delta_n)t} \right] \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \prod_{n=N}^M (1 - \beta_n t).$$

Or,

$$\prod_{n=N}^M (1 - \beta_n t) \leq e^{-\sum_{n=N}^M \beta_n t},$$

on en déduit donc que

$$\liminf_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \left(1 - \prod_{n=N}^M \left[\frac{\delta_n}{\beta_n + \delta_n} + \frac{\beta_n}{\beta_n + \delta_n} e^{-(\beta_n + \delta_n)t} \right] \right) \geq \sum_{n=N}^M \beta_n.$$

Ainsi, pour $x \in S_N$ et tout $M \geq N$

$$\liminf_{t \rightarrow 0} \frac{1 - p_t(x, x)}{t} \geq \sum_{n=N}^M \beta_n.$$

Si la série $\sum \beta_n$ diverge, on obtient en faisant tendre M vers l'infini

$$\liminf_{t \rightarrow 0} \frac{1 - p_t(x, x)}{t} = \infty.$$

2.4 De la description infinitésimale à la chaîne de Markov

Voir la section 5 du chapitre 2 de [Lig10].

3 Processus de Feller

Dans cette section S est un espace métrique séparable compact ou localement compact et $\mathcal{C}(S)$ l'ensemble des fonctions continues sur S à valeurs réelles dans le cas compact, et nulles à l'infini dans le cas localement compact. La norme uniforme d'une fonction f est notée

$$\|f\| = \sup_{x \in S} |f(x)|.$$

3.1 Définitions

Soit Ω l'ensemble des fonctions continues à droite $\omega : [0, \infty) \rightarrow S$ possédant une limite à gauche en tout point. On note $X(t, \omega) = \omega(t)$ et $(\theta_s \omega)(t) = \omega(t + s)$. On munit Ω de la tribu $\mathcal{F}$ définie comme la plus petite tribu rendant les applications $\omega \mapsto \omega(t)$ mesurable pour tout $t \geq 0$.

Définition 3.1. Un processus de Feller sur S est défini par

- (a) une famille de probabilités $\{\mathbb{P}^x, x \in S\}$ sur Ω ,
- (b) une filtration continue à droite $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ sur $(\Omega, \mathcal{F})$ pour laquelle le processus $X(t)$ est adapté et qui vérifie

$$(3.1) \quad \mathbb{P}^x(X(0) = x) = 1,$$

(3.2) l'application $x \mapsto \mathbb{E}^x(f(X(t)))$ est continue, $\forall f \in \mathcal{C}(S), \quad \forall t \geq 0$,

et

$$(3.3) \quad \mathbb{E}^x(Y \circ \theta_s | \mathcal{F}_s) = \mathbb{E}^{X(s)}(Y), \quad \mathbb{P}^x - p.s.,$$

pour tout $x \in S$ et tout Y mesurable bornée.

La propriété (3.3) est la propriété de Markov que l'on a déjà rencontrée en (2.1). La propriété (3.2) est connue comme étant la propriété de Feller. Un moyen de comprendre cette propriété est de dire que si (x_n) converge vers x , alors la loi de $X(t)$ pour le processus partant de x_n converge faiblement vers la loi de $X(t)$ pour le processus partant de x .

La propriété de Feller couplée avec la continuité à droite des trajectoires entraîne la propriété de Markov forte, à savoir

$$\mathbb{E}^x(Y_\tau \circ \theta_\tau | \mathcal{F}_\tau) = \mathbb{E}^{X(\tau)}(Y_\tau), \quad \mathbb{P}^x - p.s. \quad \text{sur} \quad \{\tau < \infty\}$$

si $Y_s(\omega)$ est bornée et mesurable sur $[0, \infty) \times \Omega$ et τ est un temps d'arrêt. Cette notation n'est pas simple à comprendre. Tout d'abord, $Y_\tau \circ \theta_\tau$ dépend de ω en trois endroits :

$$Y_\tau \circ \theta_\tau(\omega) = Y_{\tau(\omega)}[\theta_{\tau(\omega)}(\omega)].$$

Ensuite, $\mathbb{E}^{X(\tau)}(Y_\tau)$ est la quantité $\phi(X(\tau), \tau)$, avec $\phi(y, t) = \mathbb{E}^y(Y_t)$.

Sans la propriété de Feller, la propriété de Markov forte peut ne pas avoir lieu comme le montre l'exemple suivant.

Exemple 3.2. Pour cet exemple uniquement, on prend Ω égal à l'ensemble des fonctions continues sur $[0, \infty)$ et $\mathcal{F}$ définie comme précédemment. Considérons la famille de probabilités $\{\mathbb{P}^x\}$ sur $(\Omega, \mathcal{F})$ définie de la manière suivante.

(a) Si $x \neq 0$, $\mathbb{P}^x$ est la loi du mouvement brownien partant de x .

(b) $\mathbb{P}^0$ est la masse de Dirac sur la fonction $\omega \equiv 0$.

Ce processus est à trajectoires continues, possède la propriété de Markov, ne possède pas la propriété de Feller et ne vérifie pas la propriété de Markov forte

Démonstration. Ce processus est à trajectoire continue. En effet, pour $x \neq 0$, il existe un ensemble mesurable A_x tel que $\mathbb{P}^x(A_x) = 1$ et $t \mapsto X(t, \omega)$ est continue pour tout $\omega \in A_x$. Ceci vient de la définition du mouvement brownien partant de x . Pour $x = 0$, on remarque que la fonction $t \mapsto X(t, 0)$ est la fonction nulle, donc continue et que $\mathbb{P}^0(\{0_\Omega\}) = 1$.

Ce processus satisfait la propriété de Markov. En effet, pour $x \neq 0$, ceci découle de la propriété de Markov et du fait que $X(s) \neq 0$ $\mathbb{P}^x$ -p.s. Pour $x = 0$, on a d'une part

$$\mathbb{E}^0(Y \circ \theta_s | \mathcal{F}_s) = Y(0_\Omega),$$

et puisque $\mathbb{P}^0(X(s) = 0) = 1$

$$\mathbb{E}^{X(s)}(Y) = \mathbb{E}^0(Y) = Y(0_\Omega).$$

Ce processus ne satisfait pas la propriété de Feller. En effet, prenons f une fonction continue, paire, strictement positive sur $]0, 1[$, nulle sur $[1, \infty[$ avec $f(0) = 0$. On a alors

$$\mathbb{E}^0(f(X(1))) = f(0) = 0,$$

et

$$\mathbb{E}^x(f(X(1))) \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^1 f(u) e^{-\frac{u^2}{2}} du > 0.$$

Le processus ne vérifie pas la propriété de Markov forte. Prenons τ le temps d'atteinte de 0, on a alors $X(\tau) = 0$, $\mathbb{P}^x$ -presque sûrement. Ainsi avec $Y_s(\omega) = g(\omega(1))$, on a

$$\mathbb{E}^{X(\tau)}(Y_\tau) = g(0),$$

et

$$\mathbb{E}^x(Y_\tau \circ \theta_\tau | \mathcal{F}_\tau) = \mathbb{E}^x(g(X(\tau+1)) | \mathcal{F}_\tau) = \mathbb{E}(g(Z)),$$

avec Z une variable aléatoire gaussienne centrée réduite. $\square$

Lors de la description des chaînes de Markov à temps continu, le deuxième objet que nous avons introduit était la fonction de transition. Dans le cadre, des processus de Feller, le deuxième objet est une famille d'opérateurs linéaires possédant une propriété de semi-groupe. Cela peut paraître un peu éloigné au premier abord mais il n'en est rien puisque qu'une fonction de transition peut être vue comme une famille d'opérateurs avec une propriété de semi-groupe si l'on pose

$$T(t)f(x) = \sum_y p_t(x, y)f(y), \quad \forall f \in \mathcal{C}(S).$$

Définition 3.3. *Un semi-groupe de probabilités est une famille d'opérateurs linéaires continus $\{T(t), t \geq 0\}$ sur $\mathcal{C}(S)$ vérifiant les propriétés suivantes.*

- (a) $T(0)f = f$, pour tout $f \in \mathcal{C}(S)$.
- (b) $T(t)f \xrightarrow[t \searrow 0]{} f$, pour tout $f \in \mathcal{C}(S)$.
- (c) $T(t+s)f = T(s)T(t)f$, pour tout $f \in \mathcal{C}(S)$.
- (d) $T(t)f \geq 0$, pour tout fonction $f \in \mathcal{C}(S)$ positive.
- (e) Si S est compact, $T(t)1 = 1$ pour tout $t > 0$; si S n'est pas compact, il existe une suite bornée de fonctions (f_n) telle que $T(t)f_n$ converge simplement vers 1 pour tout $t \geq 0$.

La propriété (c) est l'analogue des équations de Chapman-Kolmogorov pour une fonction de transition, et est appelée la propriété de semi-groupe.

Les propriétés (d) et (e) entraînent $\|T(t)f\| \leq \|f\|$.

Exemple 3.4. Prenons $S = \mathbb{R}$ et $X(t)$ le mouvement brownien. Alors

$$T(t)f(x) = \mathbb{E}^x(f(X(t)))$$

est un semi-groupe de probabilités. Par contre ce processus ne vérifie pas la propriété (b) si $\mathcal{C}(S)$ est l'ensemble des fonctions continues bornées.

Démonstration. Soit $x_0 = 0$ et $x_n = \sum_{k=1}^n \frac{2}{k}$. Définissons la fonction $f = \sum_n f_n$ avec

$$f_n(x) = \begin{cases} (n+1)(x-x_n) & \text{si } x_n \leq x \leq x_n + \frac{1}{n+1}, \\ 2 - (n+1)(x-x_n) & \text{si } x_n + \frac{1}{n+1} \leq x \leq x_n + \frac{2}{n+1}, \\ 0 & \text{else.} \end{cases}$$

La fonction f est continue bornée et vérifie $f(x_n) = 0$ pour tout n . On a

$$\sqrt{2\pi t} \mathbb{E}^{x_n}(f(X(t))) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-\frac{(x-x_n)^2}{2t}} dx \geq \int_{x_n}^{x_n + \frac{1}{n+1}} f(x) e^{-\frac{(x-x_n)^2}{2t}} dx.$$

Comme,

$$\int_{x_n}^{x_n + \frac{1}{n+1}} f(x) e^{-\frac{(x-x_n)^2}{2t}} dx = 2(n+1)t \left(1 - e^{-\frac{1}{2t(n+1)^2}} \right),$$

on en déduit que

$$\mathbb{E}^{x_n}(f(X(t))) \geq \sqrt{\frac{2t}{\pi}} (n+1) \left(1 - e^{-\frac{1}{2t(n+1)^2}} \right).$$

En prenant $2t_n = (n+1)^{-2}$, on obtient

$$\mathbb{E}^{x_n}(f(X(t_n))) \geq 1 - \frac{1}{e},$$

ce qui empêche d'avoir une convergence uniforme. $\square$

Après avoir vu l'analogie des fonctions de transition, voici l'équivalent des Q -matrices, les générateurs. Le lien est un petit peu plus évident puisque qu'une matrice est naturellement un opérateur linéaire.

Pour la suite, on note $\mathcal{D}$ le domaine d'un opérateur et $\mathcal{R}$ son image.

Définition 3.5. Un générateur de probabilité est un opérateur linéaire $\mathcal{L}$ sur $\mathcal{C}(S)$ vérifiant les propriétés suivantes

- (a) $\mathcal{D}(\mathcal{L})$ est dense dans $\mathcal{C}(S)$.
- (b) Si $f \in \mathcal{D}(\mathcal{L})$, $\lambda \geq 0$, and $f - \lambda \mathcal{L}f = g$, alors

$$\inf_{x \in S} f(x) \geq \inf_{x \in S} g(x).$$

- (c) $\mathcal{R}(I - \lambda \mathcal{L}) = \mathcal{C}(S)$ pour tout λ assez petit.

(d) Si S est compact : $1 \in \mathcal{D}(\mathcal{L})$ et $\mathcal{L}1 = 0$; si S n'est pas compact : pour tout $\lambda > 0$ petit, il existe une suite (f_n) de $\mathcal{D}(\mathcal{L})$ convergeant simplement vers 1 telle que la suite (g_n) définie par $g_n = f_n - \lambda \mathcal{L} f_n$ vérifie $\sup_n \|g_n\| < \infty$ et converge simplement vers 1.

La propriété (b) entraîne

$$\|f\| \leq \|(I - \lambda \mathcal{L})f\|,$$

ce qui signifie que pour $\lambda > 0$ assez petit, $(I - \lambda \mathcal{L})^{-1}$ est définie et laisse stable les fonctions positives.

Afin de comprendre la définition 3.5, voici un exemple de générateur.

Exemple 3.6. On prend $S = \mathbb{R}$,

$$\mathcal{D}(\mathcal{L}) = \{f \in \mathcal{C}(S) : f' \in \mathcal{C}(S)\} \quad \text{et} \quad \mathcal{L}f = f'.$$

Alors $\mathcal{L}$ est un générateur de probabilité.

Démonstration. (a) Soit $f \in \mathcal{C}(S)$. En dehors d'un intervalle $[a, b]$, $|f|$ est uniformément majorée par ε , et sur $[a, b]$ on peut approcher f par un polynôme à ε près. En recollant comme il faut, tout se passe bien.

(b) Soit $f \in \mathcal{D}(\mathcal{L})$, alors f et f' sont dans $\mathcal{C}(S)$. Soit $\lambda \geq 0$, et supposons qu'il existe x_0 tel que $f(x) \geq f(x_0)$ pour tout x réel. On a alors $f'(x_0) = 0$ et en conséquence $g(x_0) = f(x_0)$, ce qui entraîne $\inf_x g(x) \leq f(x_0) = \inf_x f(x)$. Soit (x_n) telle que $f(x_n)$ converge vers $\inf_x f(x)$. Si (x_n) est bornée, on peut en extraire une sous suite qui converge et par continuité de f , on trouve un x_0 comme précédemment. Si (x_n) n'est pas bornée, on peut en extraire une sous suite qui converge vers l'infini, ce qui entraîne que $\inf_x f(x) = 0$ car f est nulle à l'infini. Comme g est aussi nulle à l'infini, on sait que $\inf_x g(x) \leq 0 = \inf_x f(x)$.

(c) Soit $g \in \mathcal{C}(S)$, on cherche $f \in \mathcal{D}(\mathcal{L})$ telle que $f - \lambda f' = g$. Une solution f de cette équation différentielle est de la forme

$$f(x) = e^{\frac{1}{\lambda}x} \left(\alpha - \frac{1}{\lambda} \int_0^x g(t) e^{-\frac{1}{\lambda}t} dt \right), \quad \text{avec} \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Prenons $\alpha = \frac{1}{\lambda} \int_0^\infty g(t) e^{-\frac{1}{\lambda}t} dt$, on a alors

$$f(x) = \frac{1}{\lambda} \int_x^\infty g(t) e^{\frac{1}{\lambda}(x-t)} dt = \frac{1}{\lambda} \int_0^\infty g(u+x) e^{-\frac{1}{\lambda}u} du.$$

Cette fonction est bien nulle en $+\infty$ puisque

$$|f(x)| \leq \sup_{[x, +\infty)} |g|,$$

et elle est aussi nulle en $-\infty$ grâce au théorème de convergence dominée.

(d) Les fonctions plateaux conviennent. □

3.2 Des processus de Feller aux générateurs

Théorème 3.7. *Étant donné un processus de Feller, on pose*

$$T(t)f(x) = \mathbb{E}^x(f(X(t))),$$

pour tout $f \in \mathcal{C}(S)$. Alors $T(t)$ est un semi groupe de probabilités sur $\mathcal{C}(S)$.

Démonstration. Les propriétés (a), (d) et (e) sont immédiates. La propriété de semi groupe découle de la propriété de Markov.

$$\begin{aligned} T(t+s)f(x) &= \mathbb{E}^x(f(X(t+s))) = \mathbb{E}^x(\mathbb{E}^x(f(X(t+s)) | \mathcal{F}_t)) \\ &= \mathbb{E}^x(\mathbb{E}^{X(t)}(f(X(s)))) = \mathbb{E}^x(T(s)f(X(t))) \\ &= T(t)T(s)f(x). \end{aligned}$$

Montrer la propriété (b) est un peu plus pénible... et elle est laissée au lecteur. $\square$

Théorème 3.8. *Supposons que $T(t)$ est un semi groupe de probabilité, et définissons*

$$(3.4) \quad \mathcal{L}f = \lim_{t \searrow 0} \frac{T(t)f - f}{t},$$

sur

$$\mathcal{D}(\mathcal{L}) = \{f \in \mathcal{C}(S) : \text{la limite en (3.4) existe}\}.$$

Alors $\mathcal{L}$ est un générateur de probabilité.

Démonstration. Le lecteur peut consulter [Lig10] pages 100 et 101. $\square$

Remarque 3.9. *Le théorème 3.8 admet une réciproque. Si $\mathcal{L}$ est un générateur de probabilité, alors*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(I - \frac{t}{n} \mathcal{L}\right)^{-n} f = T(t)f,$$

est un semi groupe sur $\mathcal{C}(S)$.

Exemple 3.10 (Mouvement uniforme vers la droite). *On considère le processus de Feller pour lequel $\mathbb{P}^x$ est la masse de Dirac sur la fonction $\omega : t \mapsto x + t$, ce qui équivaut à définir le semi groupe $T(t)f(x) = f(x+t)$. Alors le générateur de ce processus est le générateur donné dans l'exemple 3.6.*

Démonstration. Soit $x \in \mathbb{R}$. La limite simple en (3.4) existe si et seulement si la fonction f est dérivable en x . On en déduit donc que

$$\mathcal{L}f(x) = f'(x) \quad \text{et} \quad f \in \mathcal{D}(\mathcal{L}) \Rightarrow f \text{ dérivable sur } \mathbb{R}.$$

De plus, $\mathcal{L}(f)$ est la limite uniforme de fonctions dans $\mathcal{C}(S)$, c'est donc aussi une fonction de $\mathcal{C}(S)$. En conséquence,

$$\mathcal{D}(\mathcal{L}) = \{f \in \mathcal{C}(S) : f' \in \mathcal{C}(S)\} \quad \text{et} \quad \mathcal{L}f = f'. \quad \square$$

3.3 Comment construire un générateur ?

Il est très rare de pouvoir définir un générateur complet, essentiellement à cause du domaine. En conséquence, on définit un pré-générateur sur un ensemble de braves fonctions, et on utilise un théorème d'extension.

Définition 3.11. *Un opérateur linéaire sur $\mathcal{C}(S)$ est dit fermé si son graphe*

$$\{(f, \mathcal{L}f) : f \in \mathcal{D}(\mathcal{L})\}$$

est un fermé de $\mathcal{C}(S) \times \mathcal{C}(S)$.

La fermeture $\bar{\mathcal{L}}$ d'un opérateur linéaire $\mathcal{L}$ est l'opérateur linéaire dont le graphe est la fermeture du graphe de $\mathcal{L}$ et tel que cette fermeture soit le graphe d'un opérateur linéaire.

Tout opérateur linéaire n'admet pas une fermeture. Prenons par exemple $S = [0, 1]$ avec

$$\mathcal{D}(\mathcal{L}) = \{f \in \mathcal{C}(S) : f'(0) \text{ existe}\} \quad \text{et} \quad \mathcal{L}f = f'(0) \quad \text{pour } f \in \mathcal{C}(S),$$

alors la fermeture du graphe de $\mathcal{L}$ n'est pas le graphe d'un opérateur linéaire. En effet, la suite (f_n) définie par $f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sqrt{x + \frac{1}{n}}$ vérifie

$$f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0 \quad \text{et} \quad \mathcal{L}f_n = 1 \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 1 \neq 0.$$

Dans le cadre de la définition 3.5, ceci ne peut pas arriver comme le stipule la proposition suivante.

Proposition 3.12. *Soit $\mathcal{L}$ un opérateur linéaire sur $\mathcal{C}(S)$.*

- (a) *Supposons que $\mathcal{L}$ vérifie les propriétés (a) et (b) de la définition 3.5. Alors $\bar{\mathcal{L}}$ existe et vérifie également (a) et (b).*
- (b) *Si $\mathcal{L}$ vérifie (a), (b) et (c) de la définition 3.5, alors $\mathcal{L}$ est fermé.*
- (c) *Si $\mathcal{L}$ vérifie (b) et (c) de la définition 3.5, alors*

$$\mathcal{R}(I - \lambda \mathcal{L}) = \mathcal{C}(S) \quad \text{pour tout } \lambda > 0.$$

- (d) *Si $\mathcal{L}$ est fermé et vérifie (b) de la définition 3.5, alors $\mathcal{R}(I - \lambda \mathcal{L})$ est un fermé de $\mathcal{C}(S)$.*

Définition 3.13. *Un ensemble D est un coeur pour $\mathcal{L}$ si la fermeture de $\mathcal{L}|_D$ est égale à $\mathcal{L}$.*

4 Systèmes de spin

Les systèmes de particules en interaction, en particulier les modèles de spins, sont des processus de Feller définies sur l'espace d'états $\{0, 1\}^S$ avec S un ensemble dénombrable. Ces processus sont vraiment à part puisqu'ils diffèrent des chaînes de Markov à temps continu et des processus à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ comme le mouvement brownien.

4.1 Construction

On change nos notations pour s'adapter aux notations en vigueur dans le domaine. On travaille à présent dans l'espace $\{0, 1\}^S$ avec S un ensemble dénombrable. Une configuration de $\{0, 1\}^S$ est à présent notée η et le processus au cours du temps η_t .

On note $c(x, \eta)$ une fonction positive, uniformément majorée de $S \times \{0, 1\}^S$ et continue en η pour chaque $x \in S$.

La configuration η^x est définie à partir de la configuration η en remplaçant la valeur $\eta(x)$ de η en x par $1 - \eta(x)$. C'est ce qu'on appelle un *flip* en x . Le taux de flip de x dans la configuration η , c'est à dire le taux $\eta \rightarrow \eta^x$ est donné par $c(x, \eta)$.

On a donc envie de définir comme générateur

$$\mathcal{L}f(\eta) = \sum_{x \in S} c(x, \eta)[f(\eta^x) - f(\eta)], \quad f \in \mathcal{C}(\{0, 1\}^S).$$

Comme on veut que la somme ci-dessus soit uniformément convergente, on va définir $\mathcal{L}$ sur

$$D = \{f \in \mathcal{C}(\{0, 1\}^S) : |||f||| = \sum_{x \in S} \sup_{\eta} |f(\eta^x) - f(\eta)| < \infty\}.$$

Remarque 4.1. On peut voir que la condition ci-dessus n'entraîne pas la continuité de f en général. En effet, prenons $S = \{0, 1, 2, \dots\}$ et $f(\eta) = \limsup(\eta)$. Pour tout x , on a $f(\eta_x) = f(\eta)$, donc la somme ci-dessus est finie. Par contre, f n'est pas continue. Prenons la suite $(\eta_{(x)})$ définie par

$$\eta_{(x)}(y) = \begin{cases} 1 & \text{si } y \leq x, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Cette suite converge vers $\eta \equiv 1$ tandis que $f(\eta_{(x)}) = 0$ converge vers $0 \neq 1$.

On va voir à présent à quelles conditions sur $c(x, \eta)$ la fermeture de $\mathcal{L}$ est un générateur de probabilité. Les propriétés (a), (b) et (d) sont vérifiées par $\mathcal{L}$ et transmises à $\bar{\mathcal{L}}$.

Pour (a), on utilise le théorème de Stone-Weirstrass : D est une algèbre de fonctions continues sur un compact qui sépare les points ($\eta \neq \zeta$ implique qu'il existe $x \in S$ tel que $\eta(x) \neq \zeta(x)$ et la fonction $f(\xi) = \xi(x)$ sépare η et ζ) et qui contient les fonctions constantes. On peut s'éviter la peine de sortir l'artillerie lourde en construisant directement une suite de fonctions (f_n) de D qui converge vers $f \in \mathcal{C}(\{0, 1\}^S)$ de la manière suivante. On se donne une suite croissante de parties finies (S_n) qui converge vers S , et on pose $f_n(\eta) = f(\eta_n)$ où

$$\eta_n(x) = \begin{cases} \eta(x) & \text{si } x \in S_n, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Pour (b), prenons $f \in D$ et $\lambda \geq 0$ tels que $f - \lambda \mathcal{L}f = g$. Comme f est continue sur un compact, il existe une configuration η en laquelle f atteint son minimum. En particulier, pour tout $x \in S$, on a $f(\eta^x) - f(\eta) \geq 0$ et $\lambda \mathcal{L}f(\eta) \geq 0$, ce qui entraîne $g(\eta) \leq f(\eta)$.

Pour (d), on remarque simplement que $1 \in D$ et $\mathcal{L}1 = 0$.

On aura donc compris que la partie copieuse consiste à montrer la propriété (c), à savoir

$$\mathcal{R}(I - \lambda \mathcal{L}) = \mathcal{C}(\{0, 1\}^S).$$

Étape 1. On construit une suite de pré-générateurs bornés $(\mathcal{L}_n)$ qui approche $\mathcal{L}$, et on montre que tout pré-générateur borné est un générateur.

Définissons

$$(4.1) \quad \mathcal{L}_n f(\eta) = \sum_{x \in S_n} c(x, \eta) [f(\eta^x) - f(\eta)], \quad f \in \mathcal{C}(\{0, 1\}^S).$$

Ce générateur représente le système de spin pour lequel les spins en dehors de S_n sont gelés.

Proposition 4.2. $\mathcal{L}_n$ est un opérateur borné qui vérifie

$$(4.2) \quad \mathcal{R}(I - \lambda \mathcal{L}_n) = \mathcal{C}(\{0, 1\}^S), \quad \forall \lambda \geq 0.$$

Démonstration. Puisque

$$|\mathcal{L}_n f(\eta)| \leq [2|S_n| \sup c(x, \eta)] \|f\|,$$

$\mathcal{L}_n$ est un opérateur borné. Ainsi pour tout λ assez petit, l'application $I - \lambda \mathcal{L}_n$ est inversible et $\mathcal{R}(I - \lambda \mathcal{L}_n) = \mathcal{C}(\{0, 1\}^S)$. Il reste à montrer que ceci est vrai pour tout λ positif.

Soit $\gamma > 0$ et $0 < \lambda < \gamma$ tel que $I - \lambda \mathcal{L}_n$ est inversible. Soit $g \in \mathcal{C}(\{0, 1\}^S)$. Définissons l'application $\Gamma : \mathcal{C}(\{0, 1\}^S) \rightarrow \mathcal{C}(\{0, 1\}^S)$ par

$$\Gamma h = \frac{\lambda}{\gamma} (I - \lambda \mathcal{L}_n)^{-1} g + \left(1 - \frac{\lambda}{\gamma}\right) (I - \lambda \mathcal{L}_n)^{-1} h.$$

On a

$$\|\Gamma h - \Gamma h'\| = \left(1 - \frac{\lambda}{\gamma}\right) \|(I - \lambda \mathcal{L}_n)^{-1} (h - h')\| \leq \left(1 - \frac{\lambda}{\gamma}\right) \|h - h'\|,$$

ce qui entraîne que Γ est un opérateur contractant, et donc possède un unique point fixe $f \in \mathcal{C}(\{0, 1\}^S)$. On a ainsi

$$f = \frac{\lambda}{\gamma} (I - \lambda \mathcal{L}_n)^{-1} g + \left(1 - \frac{\lambda}{\gamma}\right) (I - \lambda \mathcal{L}_n)^{-1} f$$

qui devient en appliquant $(I - \lambda \mathcal{L}_n)$

$$(I - \lambda \mathcal{L}_n)f = \frac{\lambda}{\gamma}g + \left(1 - \frac{\lambda}{\gamma}\right)f.$$

En multipliant par $\frac{\gamma}{\lambda}$, il vient

$$(I - \gamma \mathcal{L}_n)f = g,$$

ce qui montre que g appartient à $\mathcal{R}(I - \gamma \mathcal{L}_n)$. $\square$

Étape 2. Grâce à l'étape 1, pour tout $g \in D$, on peut trouver $f_n \in \mathcal{C}(\{0, 1\}^S)$ telle que

$$f_n - \lambda \mathcal{L}_n f_n = g.$$

On montre que $f_n \in D$ en contrôlant Δ_f à l'aide de Δ_g et de nouvelles hypothèses sur $c(x, \eta)$.

Proposition 4.3. Soit $f \in \mathcal{C}(\{0, 1\}^S)$ telle que $f - \lambda \mathcal{L}_n f = g \in D$. Supposons que

$$(4.3) \quad M = \sup_x \sum_{u: u \neq x} \gamma(x, u) < \infty, \quad \gamma(x, u) = \sup_{\eta} |c(x, \eta^u) - c(x, \eta)|.$$

Alors $f \in D$.

Démonstration. On cherche à montrer que f appartient à D , c'est à dire à contrôler

$$|||f||| = \sum_x \sup_{\eta} |f(\eta^x) - f(\eta)|.$$

Définissons $\Delta_f(x)$ par

$$\Delta_f(x) = \sup_{\eta} |f(\eta^x) - f(\eta)|.$$

On a alors

$$\sum_x \Delta_f(x) = |||f|||.$$

Tout le but va être de contrôler Δ_f par Δ_g .

Appliquons g en η et η^u et soustrayons. Il vient

$$(4.4) \quad \begin{aligned} g(\eta^u) - g(\eta) &= [f(\eta^u) - f(\eta)][1 + \lambda c(x, \eta^u) + \lambda c(x, \eta)] \\ &\quad - \lambda \sum_{x: x \neq u} \left(c(x, \eta^u)[f((\eta^u)^x) - f(\eta^u)] - c(x, \eta)[f(\eta^x) - f(\eta)] \right). \end{aligned}$$

Pour u fixé, l'application $\zeta \mapsto |f(\zeta^u) - f(\zeta)|$ est continue sur un compact, donc il existe η telle que

$$f(\eta^u) - f(\eta) = \sup_{\zeta} |f(\zeta^u) - f(\zeta)| = \Delta_f(u).$$

La valeur absolue à gauche a été supprimée quitte à remplacer η par η^u . Il vient alors avec $\zeta = \eta^x$

$$f((\eta^x)^u) - f(\eta^x) \leq f(\eta^u) - f(\eta),$$

ce qui entraîne en remarquant que $f((\eta^x)^u) = f((\eta^u)^x)$

$$f((\eta^u)^x) - f(\eta^u) \leq f(\eta^x) - f(\eta).$$

En utilisant (4.4), il vient

$$\Delta_f(u)[1 + \lambda c(u, \eta^u) + \lambda c(u, \eta)] \leq \Delta_g(u) + \lambda \sum_{x: x \neq u} [c(x, \eta_u) - c(x, \eta)][f(\eta_x) - f(\eta)].$$

Si l'on définit ε par

$$\varepsilon = \inf_{u, \eta} [c(u, \eta^u) + c(u, \eta)],$$

et $\gamma(x, u)$ par

$$\gamma(x, u) = \sup_{\eta} |c(x, \eta^u) - c(x, \eta)|,$$

on obtient

$$(4.5) \quad \Delta_f(u)[1 + \lambda \varepsilon] \leq \Delta_g(u) + \lambda \sum_{x: x \neq u} \gamma(x, u) \Delta_f(x).$$

Finalement,

$$\begin{aligned} [1 + \lambda \varepsilon] \sum_u \Delta_f(u) &\leq \sum_u \Delta_g(u) + \sup_x \Delta_f(x) \sum_u \sum_{x: x \neq u} \gamma(x, u), \\ &\leq \sum_u \Delta_g(u) + \sup_x \Delta_f(x) \sum_x \sum_{u: u \neq x} \gamma(x, u), \\ &\leq \sum_u \Delta_g(u) + \sup_x \Delta_f(x) |S_n| M < \infty. \end{aligned} \quad \square$$

Étape 3. On définit $g_n = f_n - \lambda \mathcal{L} f_n$, et on montre que $g_n \rightarrow g$. Ainsi, $D \subset \overline{\mathcal{R}(I - \lambda \mathcal{L})}$, et comme D est dense dans $\mathcal{C}(\{0, 1\}^S)$, on obtient bien que $\mathcal{R}(I - \lambda \mathcal{L})$ est dense dans $\mathcal{C}(\{0, 1\}^S)$.

On a

$$|g(\eta) - g_n(\eta)| = \lambda |(\mathcal{L} - \mathcal{L}_n)f_n(\eta)| \leq \sum_{x \notin S_n} c(x, \eta) |f_n(\eta^x) - f_n(\eta)|,$$

ce qui entraîne

$$\|g - g_n\| \leq \sup_{x, \eta} c(x, \eta) \sum_{x \notin S_n} \Delta_{f_n}(x).$$

Si l'on note Γ l'opérateur de $\ell^1(S)$ dans lui-même défini par

$$\Gamma \alpha(u) = \sum_{x: x \neq u} \gamma(x, u) \alpha(x),$$

l'inégalité (4.5) s'écrit

$$[1 + \lambda \varepsilon] \Delta_{f_n}(u) \leq \Delta_g(u) + \lambda \Gamma \Delta_{f_n}(u),$$

et même

$$\Delta_{f_n}(u) - \lambda \Gamma \Delta_{f_n}(u) \leq \Delta_g(u).$$

Lorsque $M < \infty$ et $0 < \lambda < M^{-1}$ l'opérateur $I - \lambda \Gamma$ de $\ell^1(S)$ dans lui-même est inversible, et on a alors

$$|||f_n||| \leq C^{ste} |||g|||,$$

ce qui entraîne

$$\|g - g_n\| \leq C^{ste} \sum_{x \in S_n} \Delta_g(x).$$

Ainsi, (g_n) converge bien uniformément vers g .

Théorème 4.4. *Supposons que $M < \infty$. Alors $\tilde{\mathcal{L}}$ défini comme la fermeture de*

$$\mathcal{L}f = \sum_x c(x, \eta) [f(\eta^x) - f(\eta)], \quad \mathcal{D}(\mathcal{L}) = D$$

est le générateur d'un semigroupe de probabilités $T(t)$. De plus,

$$(4.6) \quad \Delta_{T(t)f} \leq e^{-\varepsilon t} e^{t\Gamma} \Delta_f.$$

En particulier, si $f \in D$, $T(t)f$ également et

$$|||T(t)f||| \leq e^{(M-\varepsilon)t} |||f|||.$$

4.2 Ergodicité d'un système de spins

L'une des questions les plus importantes concernant les systèmes de spins est celle de leur ergodicité. Définissons proprement ce que cela signifie.

Tout d'abord, la notion d'ergodicité est bien sûr liée à la notion de mesure invariante. Dans le cadre des processus de Feller, et donc des systèmes de spin, cette notion est introduite grâce au semigroupe de probabilités. Pour la définition et le théorème suivants uniquement, S est un espace métrique séparable, compact ou localement compact.

Définition 4.5. *Une mesure de probabilité μ sur S est dite invariante pour le processus de Feller dont le semigroupe est $T(t)$ si $\mu T(t) = \mu$ pour tout $t \geq 0$, c'est à dire*

$$\int T(t)f d\mu = \int f d\mu,$$

pour toute fonction $f \in \mathcal{C}(S)$ et tout $t \geq 0$.

On a le théorème suivant

Théorème 4.6. *Si D est un coeur pour le générateur $\mathcal{L}$ d'un processus de Feller, alors μ est invariante pour le processus si et seulement si*

$$\int \mathcal{L}f d\mu = 0,$$

pour toute fonction $f \in D$.

On peut à présent définir l'ergodicité pour les systèmes de spin.

Définition 4.7. *Un système de spin η_t dont le semigroupe est désigné $T(t)$ est dit ergodique si il possède une unique distribution invariante μ et vérifie*

$$(4.7) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} T(t)f(\eta) = \int f d\mu,$$

pour toute configuration η et toute fonction $f \in \mathcal{C}(\{0,1\}^S)$.

Remarque 4.8. *Comme $\{0,1\}^S$ est compact, il existe au moins une distribution invariante pour le processus η_t .*

Dans le cadre de la construction des systèmes de spins, on a introduit deux constantes ε et M . La constante M mesure la dépendance maximale des taux de flip en un site suivant le reste de la configuration. La constante ε mesure la quantité minimale de flips qui se produisent indépendamment du reste de la configuration. Ainsi, si le mélange dû aux flips "indépendants" est plus fort que le mélange dû aux interactions, on comprend intuitivement que le système est ergodique. Et, en effet

Théorème 4.9. *Si $M < \varepsilon$, alors η_t est ergodique.*

Démonstration. Soit μ , une mesure invariante pour η_t . On va montrer que

$$\left| \int f d\mu - \int f d[\nu T(t)] \right|$$

tend vers 0 quand $t \rightarrow \infty$ pour tout $f \in D$ et toute mesure de probabilité ν . On a

$$\int f d\mu - \int f d[\nu T(t)] = \int [T(t)f(\eta) - T(t)f(\zeta)] d(\mu \times \nu),$$

ainsi si l'on peut contrôler $T(t)f(\eta) - T(t)f(\zeta)$ uniformément en η, ζ , on parvient au résultat.

Soient $\eta, \zeta \in \{0,1\}^S$. Il existe une suite de configurations $(\eta^{(i)})$ et de sites (x_i) distincts deux à deux, telles que $\eta^{(0)} = \eta$, $\eta^{(i+1)} = (\eta^{(i)})^{x_i}$ et $\zeta = \lim_{i \rightarrow \infty} \eta^{(i)}$. On a ainsi un chemin dans l'espace des configurations reliant η à ζ où chaque configuration intermédiaire diffère de la précédente et de la suivante en un seul et unique site. Ainsi, pour toute fonction $f \in D$

$$\begin{aligned} |T(t)f(\eta) - T(t)f(\zeta)| &= \left| \lim_{i \rightarrow \infty} [T(t)f(\eta^{(0)}) - T(t)f(\eta^{(i)})] \right| \\ &= \left| \lim_{i \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^i [T(t)f(\eta^{(j-1)}) - T(t)f(\eta^{(j)})] \right|, \end{aligned}$$

ce qui entraîne

$$\begin{aligned} |T(t)f(\eta) - T(t)f(\zeta)| &\leq \sum_{j=1}^{\infty} |T(t)f(\eta^{(j-1)}) - T(t)f(\eta^{(j)})| \\ &\leq \sum_x \Delta_{T(t)f}(x) = |||T(t)f|||. \end{aligned}$$

Grâce au théorème 4.4, on a ainsi

$$\sup_{\eta, \zeta} |T(t)f(\eta) - T(t)f(\zeta)| \leq e^{(M-\varepsilon)t} |||f|||,$$

pour toute fonction $f \in D$. Ceci entraîne

$$\left| \int f d\mu - \int f d[\nu T(t)] \right| \leq e^{(M-\varepsilon)t} |||f|||,$$

qui tend vers 0 pour toute fonction $f \in D$ grâce à l'hypothèse $M < \varepsilon$. Comme D est dense, ceci suffit à montrer que μ est unique et assure la convergence requise par la définition 4.7. $\square$

Exemple 4.10 (Processus de contact). *On suppose que S est un graphe dont le degré de chaque sommet est uniformément borné. Les taux de flips du processus sont donnés par*

$$c(x, \eta) = \begin{cases} 1 & \text{si } \eta(x) = 1, \\ \lambda |\{y \sim x : \eta(y) = 1\}| & \text{si } \eta(x) = 0, \end{cases}$$

où $|\cdot|$ désigne le cardinal d'un ensemble. La mesure de probabilité δ_0 qui charge avec probabilité 1 la configuration identiquement nulle est invariante, et la principale question que l'on se pose est de savoir si c'est la seule. Si l'on souhaite appliquer le théorème 4.9, il nous faut calculer ε et M . On a

$$\varepsilon = \inf_{u, \eta} [c(u, \eta^u) + c(u, \eta)] = 1,$$

et

$$\gamma(x, u) = \sup_{\eta} |c(x, \eta^u) - c(x, \eta)| = \lambda, \quad \forall u \sim x,$$

d'où

$$M = \sup_x \sum_{u: u \neq x} \gamma(x, u) = \lambda \sup_x \deg(x).$$

La dernière égalité prouve que le processus est bien défini pour tout λ et qu'il est ergodique si

$$\lambda < \frac{1}{\sup_x \deg(x)}.$$

4.3 Couplage de systèmes de spins : attractivité

Le couplage est un des beaux outils de la théorie des probabilités. Cette technique permet par exemple de prouver l'ergodicité d'une chaîne de Markov à temps discret irréductible et apériodique possédant une mesure stationnaire. Ce qui fait sa faiblesse, mais donc aussi son charme, c'est qu'il faut adapter la technique de couplage à chaque problème.

Dans le cadre des systèmes de spin, un couplage de deux processus est simplement une construction de ces deux processus sur le même espace de probabilités. Sauf que pour être utile, cette construction requiert un peu d'astuce et va faire appel à la notion d'attractivité.

Dans la suite, on dit que $\eta \leq \zeta$ si $\eta(x) \leq \zeta(x)$ pour tout $x \in S$.

Théorème 4.11. *Supposons que η_t et ζ_t sont des systèmes de spins dont les taux de flips sont donnés respectivement par $c_1(x, \eta)$ et $c_2(x, \zeta)$. Si $\eta \leq \zeta$ entraîne*

$$(4.8) \quad \begin{aligned} c_1(x, \eta) &\leq c_2(x, \zeta) & \text{for } \eta(x) = \zeta(x) = 0, \\ c_2(x, \eta) &\geq c_2(x, \zeta) & \text{for } \eta(x) = \zeta(x) = 1, \end{aligned}$$

alors il existe un couplage (η_t, ζ_t) pour des configurations initiales vérifiant $\eta \leq \zeta$ tel que

$$\mathbb{P}(\eta_t \leq \zeta_t \text{ for all } t \geq 0) = 1.$$

Démonstration. On définit le couplage requis à l'aide de taux de transitions pour les coordonnées $(\eta(x), \zeta(x))$ et on montre qu'il conserve l'ensemble $K \subset \{0, 1\}^S \times \{0, 1\}^S$ défini par

$$K = \{(\eta, \zeta) \in \{0, 1\}^S \times \{0, 1\}^S : \eta \leq \zeta\}.$$

Les taux sont donnés par le tableau suivant.

Transition	Taux
$(0, 0) \rightarrow (1, 1)$	$c_1(x, \eta)$
$\rightarrow (0, 1)$	$c_2(x, \zeta) - c_1(x, \eta)$
$(0, 1) \rightarrow (0, 0)$	$c_2(x, \zeta)$
$\rightarrow (1, 1)$	$c_1(x, \eta)$
$(1, 0) \rightarrow (0, 0)$	$c_1(x, \zeta)$
$\rightarrow (1, 1)$	$c_2(x, \eta)$
$(1, 1) \rightarrow (0, 0)$	$c_2(x, \zeta)$
$\rightarrow (0, 1)$	$c_1(x, \eta) - c_2(x, \zeta)$

Le générateur $\mathcal{L}$ sur $D(X \times X)$ correspondant est donné par

$$\begin{aligned} \mathcal{L}f(\eta, \zeta) &= \sum_x c_1(x, \eta)[f(\eta_x, \zeta) - f(\eta, \zeta)] + \sum_x c_2(x, \zeta)[f(\eta, \zeta_x) - f(\eta, \zeta)] \\ &+ \sum_{x: \eta(x) = \zeta(x)} c(x, \eta, \zeta)[f(\eta_x, \zeta_x) - f(\eta_x, \zeta) - f(\eta, \zeta_x) + f(\eta, \zeta)], \end{aligned}$$

où $c(x, \eta, \zeta) = \min\{c_1(x, \eta), c_2(x, \zeta)\}$.

Le fait que la fermeture de $\tilde{\mathcal{L}}$ est un générateur de probabilités s'établit de la même manière que pour les systèmes de spin. On peut consulter le théorème 3.9 dans le chapitre I de [Lig85].

Si (η_t, ζ_t) est le processus de Feller avec le semigroupe $\tilde{T}(t)$, alors η_t et ζ_t sont séparément des processus de Feller avec pour semigroupes respectifs $T_1(t)$ et $T_2(t)$. En effet, il suffit de vérifier que

- (*) si $f(\eta, \zeta) = g(\eta)$, alors $\tilde{\mathcal{L}}f(\eta, \zeta) = \mathcal{L}_1g(\eta)$, et
- (**) si $f(\eta, \zeta) = g(\zeta)$, alors $\tilde{\mathcal{L}}f(\eta, \zeta) = \mathcal{L}_2g(\zeta)$.

On peut voir que si $f(\eta, \zeta) = g(\eta)$, alors

$$\tilde{\mathcal{L}}f(\eta, \zeta) = \sum_x c_1(x, \eta)[f(\eta_x) - f(\eta)] = \mathcal{L}_1f(\eta),$$

ce qui prouve (*), et la partie (**) est identique.

Maintenant, on prouve que K est fermé pour l'évolution du processus couplé, c'est à dire que pour tout $t \geq 0$

$$\mathbb{P}^{(\eta, \zeta)}((\eta_t, \zeta_t) \in K) = 1,$$

dès que $(\eta, \zeta) \in K$.

Il suffit de vérifier que chaque transition laisse K invariant, ce qui est immédiat d'après le tableau que l'on a donné. $\square$

Remarque 4.12. *Il n'est pas nécessaire de définir les transitions sur toutes les configurations. On montre que K est fermé pour le processus couplé, on pourrait ainsi se contenter de configurations initiales dans K et par exemple ne pas définir les transitions à partir de $(1, 0)$.*

Définition 4.13. *Un système de spins avec les taux $c(x, \eta)$ est dit attractif si*

$$(4.9) \quad \begin{aligned} c(x, \eta) &\leq c(x, \zeta) \quad \text{for } \eta(x) = \zeta(x) = 0, \\ c(x, \eta) &\geq c(x, \zeta) \quad \text{for } \eta(x) = \zeta(x) = 1, \end{aligned}$$

dès que $\eta \leq \zeta$.

Corollaire 4.14. *Pour un système de spins attractif, il existe un couplage (η_t, ζ_t) de deux copies du processus avec configurations initiales $\eta \leq \zeta$ tel que*

$$\mathbb{P}^{(\eta, \zeta)}(\eta_t \leq \zeta_t \text{ for all } t \geq 0) = 1.$$

On va voir à présent que les systèmes de spin attractifs vérifient des propriétés de monotonie dont on va définir le sens.

Définition 4.15. (a) Une fonction $f \in \mathcal{C}(\{0,1\}^S)$ est dite croissante si $f(\eta) \leq f(\zeta)$ dès que $\eta \leq \zeta$.

(b) Deux mesure de probabilité μ et ν sont dites stochastiquement ordonnées si

$$\int f d\mu \leq \int f d\nu,$$

pour toute fonction monotone f . On notera dans ce cas $\mu \leq \nu$.

Voici un premier résultat sur la monotonie des processus

Proposition 4.16. Sous les hypothèses du théorème 4.11, si μ_1 et μ_2 sont des mesures de probabilité telles que $\mu_1 \leq \mu_2$, alors

$$\mu_1 T_1(t) \leq \mu_2 T_2(t), \quad \forall t \geq 0,$$

où $T_1(t)$ et $T_2(t)$ désignent respectivement les semigroupes de probabilité associés aux systèmes de spins de taux respectifs $c_1(x, \eta)$ et $c_2(x, \zeta)$.

Démonstration. Soit ν une mesure de couplage pour μ_1 et μ_2 , c'est à dire vérifiant

$$\nu\{(\eta, \zeta) : \eta \in A\} = \mu_1(A) \quad \text{et} \quad \nu\{(\eta, \zeta) : \zeta \in A\} = \mu_2(A),$$

pour tout ensemble mesurable A dans $\{0,1\}^S$, et aussi

$$\nu\{(\eta, \zeta) : \eta \leq \zeta\} = 1.$$

L'existence et la construction d'une telle mesure n'est pas immédiate et repose sur le théorème de Hahn-Banach et le théorème de représentation de Riesz. On pourra consulter [Lig85] pages 73 et 74. L'existence d'une telle mesure garantit également que $\mu_1 \leq \mu_2$.

Soit (η_t, ζ_t) un couplage construit d'après le théorème 4.11 avec mesure initiale ν . D'après le théorème 4.11, on a $\eta_t \leq \zeta_t$ avec probabilité 1 pour tout temps t . D'un autre côté, η_t et ζ_t sont distribués respectivement suivant $\mu_1 T_1(t)$ et $\mu_2 T_2(t)$. Ainsi, la loi jointe de (η_t, ζ_t) fournit une mesure de couplage pour $\mu_1 T_1(t)$ et $\mu_2 T_2(t)$, ce qui montre que

$$\mu_1 T_1(t) \leq \mu_2 T_2(t). \quad \square$$

Théorème 4.17. Soit $T(t)$ le semigroupe associé à un système de spins attractif. Alors

- (a) $\delta_0 T(s) \leq \delta_0 T(t)$ et $\delta_1 T(s) \geq \delta_1 T(t)$ pour $s \leq t$;
- (b) $\underline{\nu} = \lim_{t \rightarrow \infty} \delta_0 T(t)$ et $\bar{\nu} = \lim_{t \rightarrow \infty} \delta_1 T(t)$ existent et sont invariantes ;
- (c) $\delta_0 T(t) \leq \mu T(t) \leq \delta_1 T(t)$ pour tout μ ;
- (d) toute limite faible ν de $\mu T(t)$ le long d'une suite de t tendant vers l'infini vérifie $\underline{\nu} \leq \nu \leq \bar{\nu}$.

Corollaire 4.18. *Pour un système de spins attractif, les propositions suivantes sont équivalentes.*

- *Le processus est ergodique.*
- *Il existe une unique mesure invariante.*
- $\underline{\nu} = \bar{\nu}$.

Exemple 4.19. *Le processus de contact défini dans l'exemple 4.10 est un processus de contact. On sait déjà que δ_0 est invariante pour le processus. Le processus est ergodique si et seulement $\bar{\nu} = \delta_0$.*

4.4 Représentation graphique du processus de contact en dimension 1

Références

- [Lig85] Thomas M. Liggett, *Interacting Particle System*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, vol. 276, Springer-Verlag, New York, 1985.
- [Lig10] ———, *Continuous Time Markov Processes : An Introduction*, Graduate Studies in Mathematics, vol. 113, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 2010.